# Anfangsgründe
der
# Geometrie
und der gemeinen Trigonometrie,
nebst
einem Anhange der Feldmeßkunst und der allgemeinsten Begriffe des Nivellirens.

Des
## mathematischen Lehrbuchs
Ersten Theiles
Zweites Stück.

Mit Kupfern.

Zum Gebrauche des Königl. Joachimsthalischen Gymnasiums.

Mit Königl. Preuß. Chursächs. u. Churbrand. allergnädigsten Freyheiten.

Berlin, 1778.
Bey Friederich Nicolai.
Buchhändler, auf der Stechbahn.

# Anfangsgründe
der
# Geometrie.

# Einleitung.

§. 1.

Die Geometrie (Meßkunst) beschäftiget sich mit ausgedehnten Größen, welche Linien, Flächen, oder Körper heißen, je nachdem ihre Ausdehnung einfach, zweifach, oder dreifach ist.

§. 2.

Eine Stelle ohne alle Ausdehnung in einer ausgedehnten Größe wird ein **Punkt** genannt.

Dergleichen ist z. B. das Ende einer Linie, die Mitte einer Kugel.

§. 3.

Was eine **gerade Linie** sei, bedarf keiner Erklärung, wenn es auch dieselbe zuließe.

Sie bekommt in besondern Fällen die Namen der Länge, Breite, Dicke, Höhe, Weite u. dergl.

§. 4.

Eine **Ebene** (Ebene Fläche) ist eine Fläche, auf welcher sich aus jedem ihrer Punkte nach jedem andern eine gerade Linie ziehen läßt.

§. 5.

Der **Kreis**, eigentlich **Kreisumfang** (Peripherie des Zirkels) ist eine Linie (ABEA) Fig. 1., welche

welche auf einer Ebene so liegt, daß sie überall von einem Punkte derselben (C) gleichweit absteht. Dieser Punkt wird ihr Mittelpunkt genannt; die gerade Linie (CB) vom Mittelpunkt zum Umfange heißt die Eröffnung (der Halbmesser); jeder Theil des Umfanges aber ein Bogen.

§. 6.

Die gemeine Geometrie, welche sonst auch die Euklidische genannt, und der Höheren entgegengesetzt wird, betrachtet keine andere Linien, als die gerade, und den Kreis; auch keine andere Flächen und Körper, als solche, welche sich durch diese begreiffen lassen. Und zwar löset sie alle ihre Aufgaben durch Beschreibung derselben auf Ebenen ohne alles Versuchen auf; daher denn der Zirkel und das Lineal das einzige Werkzeug sind, welches die reine Geometrie zuläßt. Wenn entweder anderes Werkzeug gebraucht, oder das verlangte durch Versuchen herausgebracht wird, so nennet man ein solches Verfahren (im Gegensatz des Geometrischen) Mechanisch.

§. 7.

Wir setzen voraus, daß sich jemand dieses Werkzeuges zu bedienen wisse, um auf einer gegebenen Ebene

1) durch jede 2 Punkte eine gerade Linie zu ziehen,

2) eine solche weiter fortzuziehen.

3) Aus jedem gegebenen Punkte mit einer gegebenen Eröffnung einen Kreis zu beschreiben.

4) Eine

4) Eine gerade Linie von einem gegebenen Punkte an einer andern gegebenen gleich zu machen.

## §. 8.

Uebrigens setzt die Geometrie keine besondere Wissenschaft, sondern nur gewisse Grundsätze der gesunden Vernunft voraus. Als

1) ausgedehnte Größen können, wenn sie an Größe und Gestalt gleich sind, einander decken, oder die eine kann so in die Stelle der andern gesetzt werden, daß ihre Gränzen übereinkommen. Und

2) wenn sie einander decken können, sind sie an Gestalt und Größe gleich.

Ferner solche, welche sonst mit dem Namen der allgemeinen Rechenkunst belegt werden, und deren einige wir hier, andere, wo wir ihrer bedürfen, beibringen wollen.

3) Die Größen, deren jede einer dritten gleich ist, sind auch einander selbst gleich.

4) Wenn man zu gleichen Größen gleiches zulegt, so kommt gleiches heraus.

5) Eben dieses gilt auch, wenn man von gleichen Größen gleiches wegnimmt.

6) Legt man aber zu dem Doppelten doppelt, zu dem Dreifachen dreifach u. s. f. so viel als zu dem Einfachen, so kommt auch im ersteren Falle doppelt, im zweiten dreifach u. s. f. so viel als aus diesem heraus.

7) Und nimmt man von dem Doppelten doppelt, von dem dreifachen dreifach u. s. f. so viel als von dem Einfachen weg, so ist auch der Rest im ersteren Falle doppelt, im zweiten dreifach u. s. f. so groß, als der Rest des Einfachen.

8) Zwo Größen, welche beide aus lauter einander gleichen Theilen bestehen, verhalten sich unter einander, wie die Zahlen derer Theile, die jede in sich hält. Z. B. eine 8 zöllige Linie verhält sich zu einer 6 zölligen, wie die Zahl 8 zu der Zahl 6.

## §. 9.

Kürze halber werden wir uns bisweilen folgender Zeichen in dem dabei bemerkten Sinne bedienen:

= bedeutet die Gleichheit derer Größen, wozwischen es steht. Z. B. 1 Rthlr. = 24 Gr.

+ zeigt an, daß die vorhergehende mit der folgenden Größe zusammengenommen werden soll. Z. B. $5+4=9$. 5 zusammengenommen mit 4 sind 9.

— zeigt, daß die folgende Größe von der vorhergehenden weggenommen werden soll. Z. B. $9-5=4$. 9 weniger 5 sind 4.

(Vsßg) soll bedeuten: der Voraussetzung gemäß.

Der

# Der Geometrie
## Erster Theil.
## Von den Linien.

### I. Von den Linien und Winkeln überhaupt.

§. 10.

Der Begriff, den jeder von einer geraden Linie hat, giebt die folgenden Grundsätze an die Hand:

1) Zwischen zweenen Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

2) Gleiche gerade Linien können einander decken.

3) Unter allen Linien, welche zwischen zweenen Punkten möglich sind, ist die gerade die kürzeste.

4) Wenn sich zwo in einer Ebene befindliche gerade Linien Fig. 2. (AB und CD) auf einer Seite von (Q nach P) einander nähern, so durchschneiden sie sich auch auf eben derselben, wenn sie weit genug fortgezogen werden.

5) Sie durchschneiden sich aber nur einmahl, in einem Punkte (P), der durch ihre Lage gegen einander bestimmt wird.

§. 11.

Aus dem Begriffe von dem Kreise (§. 5.) erhellet;

 1) Daß

1) Daß alle Halbmesser eines Kreises einander gleich sind.

2) Daß, wenn mehrere Punkte Fig. 1. (A, B, E) von einem Punkte (C) ebenderselben Ebene gleich weit abstehen, aus diesem als dem Mittelpunkte ein Kreis beschrieben werden kann, der sie alle trifft.

3) Wenn man den Umfang um seinen Mittelpunkt herumdrehete, so käme zwar jeder Theil desselben in die Stelle eines andern; in der Lage des ganzen Umfanges aber würde nichts verändert.

4) Daher können gleich lange Bogen eines Kreises, gleich große Stücke desselben, einander decken.

5) Fig. 3. Zween Kreise durchschneiden einander allezeit in zweenen Punkten R und S, so daß der Mittelpunkt eines jeden C und D von beiden durchschnitten gleich weit absteht, nämlich um seinen Halbmesser, der eine um CR und CS, und der andere um DR und DS.

6) Wenn man die Ebene CSD und CD herumschlüge, so müßten die Bogen PT und QV, die andern PY und QZ so weit sie einander erreichen, decken, und daher auch die Durchschnitte S und R auf einander fallen. Zween Kreise durchschneiden sich also zu beiden Seiten der Linie, die ihre Mittelpunkte verbindet, gleich weit von derselben ab.

## §. 12.

Die Oeffnung zwoer geraden Linien Fig. 4. (AB und AC), welche einander in einem Punkte (A) durchschneiden, nennet man einen (ebenen) Win-

Winkel; sie selbst die Schenkel, und jenen Punkt die Spitze (den Scheitel) des Winkels.

§. 13.

Da die Größe eines Winkels gar nicht nach der Länge der Schenkel, sondern nach der Oefnung, die sie an seiner Spitze bilden, beurtheilt wird, so folgt hieraus,

1) daß Winkel gleich sind, wenn diese Oefnungen einander decken können, wenn auch ihre Schenkel nicht gleich lang wären.

2) Daß wenn Winkel gleich sind, diese Oefnungen, und hiermit ihre, so viel nöthig, verlängerte Schenkel, einander decken können.

§. 14.

Wenn eine gerade Linie Fig. 5 (A B) mit der andern, allenfalls fortgezogenen (C B), auf beiden Seiten (m und r) gleiche Winkel macht: so nennet man sie einander senkrechte (perpendikulare) Linien, einen jeden solchen Winkel aber einen Rechten; in dessen Gegensatze andere Winkel Schiefe heißen, nämlich Stumpfe Fig. 6 (p), wenn sie größer, und Spitzige (q) wenn sie kleiner als rechte sind.

§. 15.

Um die Größe eines Winkels genauer bestimmen zu können, theilet man einen rechten Winkel in 90, hiermit die beiden (m und r) Fig. 5. in 180 gleiche Theile, welche man Grade nennet, jeden Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden u. s. f. und zeigt an, wie viel solcher Theile ein vorkommender Winkel in sich halte. Die Grade werden mit diesem Zeichen (°) zur Rechten

über

über der Zahl, die Minuten mit ('), die Sekunden mit (") u. s. f. bemerkt. Z. B. 36° 15' 8".

§. 16.

Wenn mehrere Winkel eine Spitze haben, so benennet man, zu Vermeidung der Verwirrung, einen jeden entweder mit einem inwendig befindlichen Buchstaben oder andern Zeichen, oder mit dreien Buchstaben, so daß die Spitze in der Mitte genannt wird.

§. 17.

Alle Winkel (ACD, DCE, ECF, FCB), welche auf einer Seite einer geraden Linie Fig. 7 (AB) an einander gränzen, und ihren Scheitel in einem Punkte (C) derselben haben, müssen nothwendig zusammen zweenen Rechten Winkeln gleich sein, oder 180° in sich halten. (§ §. 14. 15.)

§. 18.

1) Wenn solcher Winkel nur zween Fig. 8 N. 1. (m und p) sind, so macht jeder den Unterschied des andern von 180° aus. Daher denn

2) Wenn ein Winkel N. 2. (m) einem andern (r) gleich ist, auch ihre Nebenwinkel (p und q) gleich sein müssen.

§. 19.

Die Winkel Fig. 9. (o und x), welche zwischen zwoen geraden Linien einander gegenüber liegen (Vertikalwinkel) sind gleich.

Denn $r + o = r + x = 180°$ (§. 17.) Daher $o = x$ (§. 8. N. 3. und 5.)

§. 20.

Wenn zwo gerade Linien Fig. 10. (AB und CD) auf einer Ebene so liegen, daß sie sich auf keiner von

beiden

beiden Seiten (S oder T) einander nähern, so nennet man sie **gleichlauffende** (parallele) Linien.

§. 21.

1) Durch einen Punkt Fig. 10. (O) außer einer geraden Linie (AB) ist jederzeit nur eine Parallellinie mit ihr möglich.

2) Parallellinien liegen auf einer Seite (S) gegen einander wie auf der andern (T); und gerade Linien, denen dieses zukommt, sind parallel.

§. 22.

Wenn eine gerade Linie Fig. 11. N. 1. (EF) zwoen andern in derselben Ebene befindlichen (AB und CD) so begegnet, daß entweder

1) die Winkel (m und r), welche sie mit ihnen inwendig auf verschiedenen Seiten macht, gleich sind; oder daß

2) der inwendige (r) an der einen dem auswendigen (o) an der andern auf eben der Seite gleich ist; oder daß

3) die beiden inwendigen auf einer Seite (r und p zusammen 180° in sich halten:

so sind diese Linien (AB und CD) parallel.

1) Wenn m = r, so ist auch p = q (§. 18. N. 2.). Drehete man nun die Linien insgesamt auf ihrer Ebene N. 2. halb herum, ohne ihre Lage gegen einander zu verrücken, und brächte hernach EF mit verwechselten Enden wieder in seine vorige Stelle: so würden um E und F in die Stellen der vorigen Winkel lauter ihnen gleiche kommen, und daher AB und CD blos ihre Seiten S und T mit einander verwechseln, ohne daß in der Lage der Linien etwas verändert würde. Sie sind also parallel. (§. 21. N. 2.)

2) Wenn

2) Wenn r = o, so ist auch r = m, weil o = m (§. 19.); man schließt also wie N. 1.

3) m + p = 180° (§. 17.) Ist nun auch p + r = 180°, so ist m + p = p + r und m = r (§. 8. N. 3. und 5.). Folglich wiederum wie N. 1.

## §. 23.

Wenn zwo Parallellinien Fig. 12. (AB und CD) von einer geraden Linie (EF durchschnitten werden, so sind

1) die Winkel (m und r), welche sie mit ihr inwendig auf verschiedenen Seiten machen, gleich.

2) Der inwendige an der einen (r) ist dem auswendigen an der andern (o) auf eben der Seite gleich.

3) Die beiden inwendigen auf einer Seite (r und p) halten zusammen 180° in sich.

1. Wäre r kleiner oder größer als m, so würde eine andere Linie (X Z oder S T), wodurch ihm im ersten Falle etwas zugelegt, im zweiten abgenommen würde, mit F E einen Winkel = m machen. Aber eben diese Linie müßte alsdenn auch mit A B durch den Punkt F parallel seyn (§. 22. N. 1.), welches unmöglich ist, da dieses von C D vorausgesetzt wird (§. 21. N. 1.) Darum kann r weder kleiner noch größer als m seyn, sondern ist ihm gleich.

2) Da m = r, so ist auch o = r. (§. 19.)

3) Da m = r, so ist m + p = r + p = 180° (§. 17. und §. 8. N. 4.)

## §. 24.

Wenn die inwendigen Winkel auf einer Seite (r und p) weniger als 180° ausmachen, so nähern sich die Linien (A B und S T) einander auf eben dieser Seite der dritten (E F); machen sie mehr aus, so entfernen sie sich daselbst. (Wie A B und XZ.)

II. Von

## II. Von den Seiten und Winkeln der geradelinigen Figuren.

§. 25.

Eine Ebene, welche um und um in eine oder mehrere Linien eingeschlossen ist, wird eine (ebene) Figur, und zwar, wenn alle diese Linien gerade sind, eine geradelinige Figur genannt. Diese Linien heißen die Seiten; die Winkel aber, welche sie mit einander machen, die Ecken der Figur, nach deren Zahl sie ein Drei- Vier- Fünfeck u. s. f. überhaupt aber auch ein Vieleck genanntwird.

§. 26.

1) Jede Seite Fig. 13. (AB) einer geradelinigen Figur (A B C D) ist kürzer als ihre übrigen Seiten zusammengenommen. (§. 10. N. 3.)

2) Wenn alle Seiten und Winkel einer Figur Fig. 32 N. 1. (A B C D E) den Seiten und Winkeln der andern (a b c d e) in eben der Ordnung gleich sind, so können die Figuren einander decken, und sind an Größe und Gestalt ganz gleich.

§. 17.

Ein Dreieck heißt gleichseitig Fig. 14. (N. 1), wenn seine drei Seiten, gleichschenklich (N. 2.), wenn zwo derselben (A B und B C) einander gleich sind. Ist unter den Winkeln eines Dreiecks (N. 3.) ein rechter, so nennet man es rechtwinklich; die Seite (D F). welche dem rechten Winkel (E) gegenüber liegt, die Hypothenuse, die andern, welche ihn zusammen machen, die Katheten.

§. 28.

Eines jeden Dreiecks Fig. 15 (A B C) Winkel machen zusammen $180^\circ$ aus.

Denn wenn man sich durch die Spitze (C) eines Winkels eine gerade Linie (DE) mit der gegen über stehenden Seite (AB) parallel gedenkt, so ist $m = A$, und $x = B$ (§. 23. N. 1.). Nun ist $m + r + x = 180^\circ$ (§. 17.). Daher $A + r + B = 180^\circ$. (§. 8. N. 4.)

§. 29.

Hieraus folgt,

1) daß wenn unter den Winkeln eines Dreiecks ein Rechter oder ein Stumpfer ist, die beiden übrigen spitzig sein, und im ersteren Falle zusammen auch einen Rechten, oder $90^\circ$, ausmachen müssen.

2) Daß wenn eine gerade Linie Fig. 14. N. 3. (FE) durch einen gewissen Punkt (F) auf eine andere (DE) senkrecht geht, keine andere gerade Linie (FD) durch eben den Punkt eben dieselbe senkrecht treffen kann.

3) Wenn zween Winkel eines Dreiecks zweenen Winkeln des andern gleich sind, so ist auch der dritte dem dritten gleich.

4) Wenn man eine Seite (AC) eines Dreiecks (ABC) fortzieht, so ist der äußere Winkel Fig. 16. (r) den beiden inwendigen ihm gegenüber liegenden (A und B) zusammengenommen gleich. Denn $r + n = A + B + n = 180^\circ$, und daher $r = A + B$.

§. 30.

Wenn in zweien Dreiecken Fig. 17. (ABC und abc) entweder

1) zwe-

1) zween Winkel nebst der Seite dazwischen, oder

2) zwo Seiten nebst dem Winkel dazwischen, oder

3) die drei Seiten

des einen eben solchen Stücken des andern gleich sind: so können die Dreiecke einander decken, und sind auch ihre übrigen Seiten oder Winkel, die in Ansehung der vorgenannten einerlei Lage haben, in beiden Dreiecken gleich.

1) Es sei N. 1. und 2. A = a, B = b, und AB = ab. Wenn man nun a auf A und b auf B legt (§. 10. N. 2.), dergestalt, daß c nach eben der Seite von AB, oder C liegt, hinfällt, so liegt ac auf AC und bc auf BC (§. 13. N. 2.), folglich c auf C (§. 10 N. 1.) und die Dreiecke decken einander.

2) Man setze AB = ab, AC = ac und A = a. Wenn man nun ab wie vorhin auf AB legt, so liegt ac auf AC (§. 13. N. 2.), und c auf C (§. 10. N. 2.), daher cb auf CB, und die Dreiecke decken einander (Ebendas. N. 1.)

3) N. 2 und 3. AB sei = ab, AC = ac, BC = bc. Man lege a auf A, und b auf B, wie vorhin. Wenn man nun aus A mit der Eröffnung AC, und aus B mit BC, die Bogen PQ und RS beschreibt, so wird ac bis in den Bogen PQ, und BC bis in den Bogen RS reichen; beide aber werden da zusammen kommen, wo die Bogen einander auf der Seite C von AB durchschneiden. Und da dieses nothwendig in C selbst geschehen muß, so wird c auf C, ca auf CA und cb auf CB fallen; folglich die Dreiecke sich decken.

Daher sind in allen drei Fällen alle drei Seiten und Winkel des einen Dreiecks den gleichgelegenen Seiten und Winkeln des andern gleich.

## §. 16.

Wenn die gleichen Stücke der Dreiecke nicht in beiden nach einer Seite liegen, sondern Fig. 18. N. 1. 2. 3.

z. B. in dem einen dasjenige zur Rechten, was in dem andern zur Linken, oder in dem einen oben, was in dem andern unten, befindlich ist, wie die mit gleichen Buchstaben benannten Stücke beistehender Dreiecke: so sieht man doch leicht, daß sich dieselben so umwenden lassen, wie es die Beweise des vorigen §. erfordern.

## §. 32.

Die gerade Linie (CD), welche

1) in einem gleichschenklichten Dreiek Fig. 19. (ABC) aus der Spitze (C) der gleichen Seiten (AC, CB) auf die dritte Seite (AB) oder

2) in einem Dreiecke, welches zween gleiche Winkel (A und B) hat, aus dem dritten Winkel (C) auf die gegen über stehende Seite

senkrecht gezogen wird, theilet dasselbe in zwei Dreiecke (CDA und CDB), deren gleichgelegene Seiten und Winkel gleich sind.

1) AC = CB (Vstzg), und CD = CD. Wenn nun D die Mitte von AB, und AD = DB ist, so können die Dreiecke CDA und CDB einander decken (§. 30. N. 3.) Aber diese Mitte kann nicht irgendwo anders in E sein; denn sonst müßten die Dreiecke CEA und CEB einander aus einem gleichen Grunde decken können, die Winkel bei E gleich sein, und CE auf AB senkrecht stehen (§. 14.), welches unmöglich ist, weil CD durch C auf AB senkrecht ist (§. 29. N. 2.). Daher sind CDA und CDB diejenigen Dreiecke, welche sich decken können.

2) Da A = B und r = x (Vstzg), so ist auch o = n (§. 29. N. 3.). Und da CD = CD, so decken sich die Dreiecke CDA und CDB einander (§. 30. N. 1.)

## §. 33.

Daher sind

1) In jedem gleichschenklichen Dreieck (ABC) die Winkel (A und B) an der dritten Seite einander

der gleich; und wenn ein Dreieck zween gleiche Winkel (A und B) hat, so sind die ihnen gegen über liegenden Seiten BC und AC gleich.

2) Ein gleichseitiges Dreieck aber muß drei gleiche Winkel haben, deren jeder 60° enthält (§. 28.); und ein gleichwinkliches drei gleiche Seiten.

## §. 34.

1) In jedem Dreiecke Fig. 20. (ABC) liegt einer größeren Seite (AC) ein größerer Winkel (CAB), einer kleineren (CB) ein kleinerer Winkel (A) gegen über.

2) Auch kann man von dem größeren Winkel (CAB) auf die gegen über liegende größere Seite (AC) schließen.

1) Man mache CD = CB, und ziehe DB; so ist o = n (§. 33. N. 1.) In dem Dreiecke ADB aber ist o = A + r (§. 29. N. 4.). Da also auch n = A + r, so ist n größer als A; noch vielmehr ist es n + r oder CAB.

2) Wenn ABC größer ist als A: so kann die Seite AC weder eben so groß (§ 33. N. 2.) noch kleiner (N. 1.) als CB sein. Sie ist also größer.

## §. 35.

Ein Viereck Fig. 21., dessen einander gegen über stehende Seiten parallel sind, wird ein Parallelogram genannt. Hat dasselbe rechte Winkel N. 1., so heißt es ein Rechteck. Sind die Seiten eines Rechteckes einander gleich, so nennet man es ein Quadrat N. 2., und zwar das Quadrat einer jeden von seinen Seiten. Ein schiefwinkliches Parallelogram wird, wenn seine Seiten

gleich sind N. 3., eine Raute; sind sie aber ungleich, eine längliche Raute N. 4. genannt.

§. 36.

Eine gerade Linie Fig. 23. (EB), welche zwo nicht an einander gränzende Ecken einer Figur (ABCDEF) verbindet, wird eine Diagonale genannt.

§. 37.

In jedem Parallelogram Fig. 22. (ABCD) sind die einander gegen über liegende Seiten und Winkel gleich.

Wenn man eine Diagonale DB zieht, so ist wegen AB und DC der Winkel $o = r$, wegen AD und BC aber $x = m$ (§. 23. N. 1.). Da $DB = DB$, so ist in den Dreiecken ADB und CBD (§. 30. N. 1.) $AB = DC$, $AD = BC$, $A = C$, $r + x = o + m$ (§. 8. N. 3.) das ist $B = D$.

§. 38.

Wenn zwo an einander gränzende Seiten Fig. 20. N. 2. und 3. (AB, BC) eines Parallelograms gleich sind, so sind sie alle gleich; und wenn ein Winkel N. 1. (A) ein Rechter ist, so sind sie es alle. (§. §. 37. und 23. N. 3.)

§. 39.

Wenn 1) die einander gegen über stehenden Seiten eines Viereckes Fig. 22. (ABCD) beiderseits gleich, oder

2) zwo derselben (AB und DC) so wohl gleich, als parallel sind:

so ist das Viereck ein Parallelogram.

1) Wenn

1) Wenn man eine Diagonale BD zieht, so sind in den Dreiecken ADB und CDB die Seiten AB = DC AD = BC (Vstzg) und DB = DB. Daher x = m, und AD mit BC parallel; ferner r = o, und AB mit DC parallel. (§. 22. N. 1.)

2) In den Dreiecken ADB und CDB ist AB = DC, (Vstzg) DB = DB, und r = o (§. 23. N. 1.). Daher x = m (§. 30. N. 2.) und AD mit BC parallel (§. 22. N. 1.). Folglich ist in beiden Fällen ABCD ein Parallelogram. (§. 35.)

## §. 40.

Die Winkel einer jeden geradelinigen Figur Fig. 23. (ABCDEF) machen zusammen genommen so viel mahl 180° aus, als die um 2 verkleinerte Zahl ihrer Seiten anzeigt,

Denn wenn man sie durch Diagonalen in Dreiecke theilt, so müssen deren zwei weniger als Seiten sind, entstehen, weil das erste (A B F) und das letzte (CDE) jedes zwo Seiten, von den übrigen aber jedes eine Seite der Figur erfordert; die Winkel dieser Dreiecke aber machen zusammen die Winkel der Figur aus. Da nun jedes Dreieck 180° enthält (§. 28), so schließt man, wie der Satz sagt.

# Aufgaben.

## §. 41.

Zu Beschreibung eines Dreiecks werden die drei Seiten Fig. 24. (DE, F G, H I), deren keine länger als die beiden andern zusammen ist (§. 26), gegeben. Man soll dasselbe über der Linie A S so beschreiben, daß D E von A nach S zu, F G in A, und H I auf dem andern Ende von D E angebracht werde.

Aufl. Man mache AB = DE (§. 7. N. 3.). Hierauf beschreibe man aus A mit der Eröffnung FG, aus B aber mit HI Bogen, und verbinde den Punkt C, wo sie sich über AB durchschneiden, durch gerade Linien mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

§. 42.

Zu Beschreibung eines gleichschenklichten Dreiecks darf nur eine der gleichen nebst der ungleichen Seite, zu Beschreibung eines gleichseitigen aber nur eine Seite gegeben werden. (§. 27.).

§. 43.

Aus einem Punkte Fig. 25 (B) einer geraden Linie (BC) einen Winkel über derselben zu beschreiben, der einem gegebenen Winkel A gleich sei.

Aufl. Man mache mit beliebiger Eröfnung AP = AQ, und beschreibe mit eben derselben aus B den Bogen EF. Aus F aber durchschneide man denselben mit der Eröfnung QP, und verbinde den Durchschnitt E durch eine gerade Linie mit B, so ist B = A.

Wenn man die geraden Linien EF und PQ zieht, so sieht man leicht (§ 41.), daß man alle Seiten der Dreiecke BEF und APQ, hiermit auch ihre Winkel, gleich gemacht. (§. 30. N. 3.)

§. 44.

Einen Punkt zu finden, der von zweenen gegebenen Punkten Fig. 26. (A und B) gleich weit abstehe, und außer der zwischen ihnen möglichen geraden Linie liege.

Aufl.

Aufl. Man beschreibe aus A und B mit einerlei Eröfnung, die aber größer als die Hälfte von A B sei, (§. 26.) Kreisbogen über oder unter A B, so thut jeder derer Punkte P oder Q wo sie sich durchschneiden, der Aufgabe ein Gnüge. (§. 11. N. 1.)

§. 45.

1) Auf der Mitte einer geraden Linie Fig. 27. (A B) eine andere senkrecht aufzurichten, und hiermit

2) Die erstere zween gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man suche zween Punkte P und Q, die von A und B gleich weit abstehen, und verbinde sie durch eine gerade Linie P Q; so ist beides geleistet.

Wenn man A und B mit P und Q verbindet, so haben die Dreiecke P Q A und P Q B gleiche Seiten, daher o = r (§. 30. N. 3). In den Dreiecken P C A und P C B aber ist A P = P B, P C = P C und o = r; daher (ang. N. 2.) A C = C B und n = x; also P Q mitten auf A B senkrecht. (§. 14.)

§. 46.

Durch einen entweder 1) in, oder

2) außer einer geraden Linie Fig. 28. N. 1. 2. (D E)

gegebenen Punkt (P) eine andere senkrecht auf dieselbe zu ziehen.

Aufl. Man mache P A = P B im 1sten Falle mit einer beliebigen, im 2ten einer solchen Eröffnung, die bis jenseits D E reicht. Alsdenn suche man einen Punkt Q, der von A und B gleich weit absteht, und verbinde P Q, welche die gesuchte Linie ist.

1) Man verbinde N. 1. Q mit A und B; so haben die Dreiecke A P Q und A P B gleiche Seiten. Daher $n = x$

2) Man wende N. 2. die Worte des Beweises §. 45. auf diese Figur an.

## §. 47.

Auf dem Ende Fig. 29. (B) einer geraden Linie (A B) eine andere senkrecht aufzurichten.

Aufl. Man nehme C nach Belieben in A B, und suche einen Punkt (P), der von B und C gleich weit absteht. Durch C und P ziehe man eine gerade Linie und mache $PQ = PC$. Endlich verbinde man Q B, welche die gesuchte Linie ist.

Wenn man P B zieht, so ist in dem gleichschenklichen Dreiecke P B C der Winkel $C = x$ (§. 33.) und $n = C + x$ (§. 29. N 5.) $= 2x$. So ist in dem Dreiecke P B Q der Winkel $Q = v$, und $r = Q + v = 2v$. Daher (§. 8. N. 6.) $n + r = 2(x + v)$, und da $n + r = 180^\circ$, so ist $x + v = 90^\circ$ und Q B senkrecht auf B A (§. 14.)

## §. 48.

Einen Winkel Fig 30. (P A Q) in zween gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man mache mit beliebiger Eröffnung $AB = AC$, suche einen Punkt D, der von B und C gleich weit absteht, und verbinde A D, so ist $DAB = DAC = \frac{1}{2} PAQ$. (§. 30. N. 3.

## §. 49.

Durch einen über einer geraden Linie Fig. 31. (A B) gegebenen Punkt (C) eine andere mit ihr parallel zu ziehen.

Aufl.

Aufl. man nehme D und E nach Belieben in AB. Aus C beschreibe man mit der Eröffnung DE, und aus E mit CD Kreisbogen, und verbinde den Punkt (P), wo sie sich (über CE §. 11. N. 6.) durchschneiden, mit C; so ist CP die gesuchte.

Wenn man CD und PE zieht, so ist DEPC ein Parallelogram (§. 39. N. 1.); also CP mit AB parallel.

## §. 50.

Aus zwoen gränzenden Seiten Fig. 32 (AB und (DE), und dem Winkel dazwischen (F) über der einen von ihnen (AB) ein Parallelogram zu beschreiben.

Aufl. Man mache A=F (§. 43.), und AC =DE. Alsdenn beschreibe man mit der Eröffnung AC aus B, und mit AB aus C Kreisbogen, und verbinde den Punkt G, wo sie sich über CB durchschneiden, mit B und C; so ist ABCG das Parallelogram. (§. 39. N. 1.).

## §. 51.

Zu Beschreibung eines Rechteckes dürfen nur zwo gränzende Seiten, zu Beschreibung eines Quadrates aber eine Seite gegeben werden. (§. §. 35. und 46.).

## §. 52.

Die Beschreibung vielseitiger Figuren Fig. 33. geschieht am leichtesten auf die Weise, daß man sie durch (entweder ausgezogene, oder allenfalls eingebildete) Diagonalen auf Dreiecke bringt, und diese in ihrer Ordnung beschreibt. (§. 40.). Es sei nun, daß die Seiten der Figur N. 1 mit zu den

Seiten dieser Dreiecke gezogen werden, oder daß man aus zweenen beliebigen Punkten N. 2. (a und b) die Spitzen derselben suche, und die Seiten der Figur dazwischen ziehe.

Eben dieses kann auch durch gegebene Seiten und Winkel, oder auch Diagonalen und Winkel geschehen, welches wir Kürze halber übergehen.

§. 53.

Zu mechanischer Beschreibung der Winkel, der senkrechten und gleichlaufenden Linien dienen sonst der Transporteur, das Winkelmaaß, das Parallellineal, oder auch das in den Reißzeugen gemeiniglich befindliche rechtwinkliche Dreieck mit einem gewöhnlichen Lineal; deren Gebrauch und Beurtheilung dem mündlichen Vortrage vorbehalten bleiben.

## III. Von den geraden Linien und Winkeln am Kreise.

§. 54.

Eine gerade Linie Fig. 34. (A B), welche zweeen Punkte des Umfanges verbindet, wird eine **Sehne**, die beiden Bogen (A E B und A F B) aber, worin sie den Kreis theilet, werden ihre **Bogen** genannt. Eine Sehne (A D), welche durch den Mittelpunkt (C) geht, heißt ein **Durchmesser** des Kreises.

§. 55.

Die Figur (A E B oder A F B), welche eine Sehne mit einem ihrer Bogen einschließt, nennet man einen Abschnitt; die aber zwischen zweenen Halbmessern und einem Bogen liegt (F C D), einen Ausschnitt.

§. 56.

## §. 56.

Der Winkel (F C D) eines Ausschnittes wird sonst auch ein **Winkel am Mittelpunkt** genannt; der Winkel (D A B) aber, welchen zwo Sehnen am Umfange machen, ein **Winkel am Umfange**. Man sagt von diesem, er bespanne den **Bogen** (B D), der zwischen seine Schenkel fällt; und er liege in dem **andern Abschnitte** des Kreises. (B A F D).

## §. 57.

1) Jeder Durchmesser Fig. 35. (A B) theilet den Kreis in zween gleiche Theile; und

2) Jede gerade Linie (A B), welche den Kreis in zween gleiche Theile (A P B und A Q B) theilet, begreift den Mittelpunkt in sich.

1) Wenn man den Kreis um seinen Mittelpunkt (C) halb herumdrehet, so daß A in B zu liegen kommt (§. 11. N. 1.), so liegt B in A (§. 10. N. 1.); und B Q A völlig in der Stelle von A P B (§. 11. N. 3.). Daher B Q A = A P B.

2) Wenn der Mittelpunkt außer A B in O läge, so wäre die durch A und O gehende gerade Linie AD ein Durchmesser, und A P D = A Q D (N. 1.), der Voraussetzung zuwider. Daher liegt der Mittelpunkt in A B.

## §. 58.

1) Wenn Winkel am Mittelpunkte Fig. 36. (A C B und D C E) gleiche Bogen (A B und D E) bespannen: so sind sie gleich; und

2) wenn die Winkel gleich sind, so sind es auch die Bogen.

In beiden Fällen drehe man den Kreis um seinen Mittelpunkt, bis B in E liegt.

1)

1) A liegt alsdenn in D (§. 11. N. 4.), daher B C und A C die Stellen von E C und D C einnehmen (§. 10. N. 1.), und die Winkel B C A und E C D gleich sein werden. (§. 13. N. 1.).

2) B C wird in E C (§. 10. N. 1.), A C in D C (§. 13. N. 2.), und der Bogen A B in D E (§. 11. N. 3.) zu liegen kommen. Daher diese Bogen gleich seyn müssen.

## §. 59.

1) Gleiche Bogen eines Kreises Fig. 37. (AB und DE) haben auch gleiche Sehnen, und

2) Wenn die Sehnen gleich sind, so sind es auch die Bogen, nämlich der kleinere (AB) ist dem kleineren (DE), und der größere (ADEB) dem größeren (DABE) gleich.

In beiden Fällen ziehe man die Halbmesser CA, CB, CE, CD. Alsdenn ist in den Dreiecken ACB und DCE.

1) AC = CE, CB = CD, und (§. 58. N. 1.) o = x. Daher (§. 30. N. 2.) die Seite AB = DE.

2) AC = CE, CB = CD, AB = DE (Vstzg). Daher o = x, und (§. 58. N 2.) der Bogen AB = DE. Folglich sind auch die Bogen ADEB und DABE, als ihre Unterschiede von dem ganzen Kreise, gleich. (§. 8. N. 5.)

## §. 60.

Ein Winkel am Mittelpunkte Fig. 38. (ACB) verhält sich jederzeit zu 180°, wie die Bogen (AB), der zwischen seine Schenkel fällt, zum halben Umfange.

AD sei ein Durchmesser, folglich ABD der halbe Umfang (§. 57. N. 1.), und ACB + BCD = 180° (§. 17.) Ferner sei der halbe Umfang in eine solche Anzahl gleicher Theile getheilt, daß ein Theilungspunkt in B fällt. Wenn man nun aus allen Theilungspunk-

ten

ten Halbmesser zieht, so werden die 180° in eben so viele gleiche Theile (§. 58. N. 1.) getheilt, als der halbe Umfang. Und der Winkel ACB enthält eben so viele solche Winkel, als der Bogen AB Theile des halben Umfanges enthält. Daher wie oben. (§. 8. N. 8.)

## §. 61.

Es kommt hier gar nicht darauf an, wie eine solche Theilung des halben Umfanges zu veranstalten sei, wodurch ein Theilungspunkt in B fällt, sondern nur, ob sich dieselbe gedenken lasse. Das letztere aber leidet keinen Zweifel, da die Zahl der zu machenden Theile nicht bestimmt wird, sondern, so groß man will, ja selbst unendlich angenommen werden kann. Unter welcher Voraussetzung der obige Beweis auch in dem Falle gelten würde, wenn der Bogen AB dem halben Umfange incommensurabel wäre.

## §. 62.

Wenn man aus dem Scheitel Fig. 39. C eines Winkels zwischen seinen Schenkeln einen Bogen beschreibt, so wird derselbe ein Winkel am Mittelpunkte (§. 56.); das Verhältniß eines solchen Bogens zum halben Umfange aber ist eben dasselbe, mit was für einem Halbmesser man ihn auch beschreiben mag; nämlich das Verhältniß des Winkels zu 180°. (§. 60.). Man erkennt daher dieses letzte, wenn man nur eines einzigen solchen Bogens Verhältniß zum halben Umfange zu erforschen weiß. Deswegen nennet man dergleichen Bogen das Maaß eines Winkels; man theilet den ganzen Umfang in 360, folglich den halben in 180 Grade, jeden Grad in 60 Minuten u. s. f.; wodurch auf einen solchen Bogen allezeit eben so viel Grade u. s. f. des Umfanges, als auf dem Winkel Grade u. s. f. der Winkel (§. 15.) fallen; und man trägt endlich diese Eintheilung des Kreises auf den Transporteur, das Astrolabium und andere Winkelinstrumente auf.

## §. 63.

Der Winkel am Mittelpunkt Fig. 40. (ACB) ist jederzeit zwei mahl so groß als der Winkel am Umfange (ADB), welcher mit ihm einen Bogen (AB) bespannt.

Der Mittelpunkt (C) liegt entweder in einem Schenkel (DB) des Winkels am Umfange (N. 1.), oder in diesem Winkel selbst (N. 2.), oder außer demselben (N. 3.).

1) N. 1. D = A (§. 33. N. 1.). Da nun p = D + A (§. 30. N. 4.), so ist p = 2. D; oder ACB = 2. ADB.

2) Man ziehe N. 2. aus D = den Durchmesser DE. Alsdenn ist m = 2. o, und n = 2. v (nach N. 1.). Also m + n = 2. (o + v) (§. 8. N. 6.); oder ACB = 2. ADB.

3) Man ziehe wiederum einen Durchmesser N. 3. DE. Alsdenn ist q + p = 2 (x + r), und q = 2. x. (nach N. 1.). Daher p = 2. r; oder ACB = 2. ADB. (§. 8. N. 7.)

## §. 64.

Daher hat ein Winkel am Umfange Fig. 41. die Hälfte des Bogens, den er bespannt, zu seinem Maaß (§. 62.); woraus denn folgt,

1) daß alle Winkel an dem Umfange N. 1. (A, B, C), welche einen Bogen (DE), oder gleiche Bogen bespannen, oder welche in einem Abschnitte (DBE), oder gleichen Abschnitten liegen (§. 56.), einander gleich sind.

2) Der Winkel N. 2. (ADB) in einem halben Kreise (AEDB) ist ein Rechter; der in einem kleineren Abschnitte (EDB) ein stumpfer, der in einem größeren (FDB) ein spitziger Winkel.

1)

§. 65.

1) Die gerade Linie Fig. 42. N. 1. (DE) welche die Mitte (F) einer Sehne (AB) senkrecht trift, theilet jeden ihrer Bogen (ADB) und (AEB) in zween gleiche Theile, und schließt den Mittelpunkt des Kreises in sich.

2) Die Linie N. 2. (CE) welche durch den Mittelpunkt (C) senkrecht auf eine Sehne (AB) geht, theilet sowohl diese, als, wenn sie fortgezogen wird, ihre beide Bogen (AEB und ADB) in zween gleiche Theile.

1) Man verbinde A und B mit D und E durch gerade Linien. Alsdenn ist in den Dreiecken AFD und BFD die Seite DF = DF, FA = FB und o = r (Vstzg). Daher AD = DB (§. 30. N. 2.) und der Bogen AD = DB (§. 59. N. 2.). Eben so sieht man, daß der Bogen AE = EB, durch Vergleichung der Dreiecke AFE und BFE.

Daher denn auch AD + AE = DB + BE (§. 8. N. 4.), und in DE der Mittelpunkt sein muß (§. 57. N. 2.).

2) Wenn man die Halbmesser CA, CB zieht, so ist das Dreieck ACB gleichschenklich, und weil o = r (Vstzg), so ist in den Dreiecken AFC und BFC (§. 32. N. 1.) AF = FB; ferner p = q, daher AE = EB. (§. 58. N. 2.). Endlich da EAD und EBD die Hälften des Kreises sind (Vstzg. und §. 57. N. 1.) so ist DA = DB. (§. 8. N. 5.)

§. 66.

Durch eine **Reguläre Figur** (ein reguläres Vieleck) versteht man eine geradelinige Figur, welche lauter gleiche Seiten und Winkel hat. Jeder solcher Winkel wird der **Polygonwinkel** derselben genannt.

§. 67.

1) Wenn an einander gränzende gleiche Sehnen Fig. 43. (AB, BC, CD u. s. f.) den ganzen Kreis bespannen, so ist die Figur (ABCDE), welche sie einschliessen, regulär.

2) Es ist jederzeit ein Kreis möglich, der alle Ecken (A, B, C) u. s. f. einer regulären Figur treffe.

1) Ihre Seiten sind gleich (Vstzg), hiemit die Bogen A B, B C u. s. f. (§. 59. N. 2.). Daher auch die Winkel (A, B u. s f.), deren jeder zween derselben weniger als Seiten sind, bespannt. (§. 64. N. 1.

2) Man theile zween an einander gränzende Winkel A und B in zween gleiche Theile (§. 48.), und ziehe aus O, wo sich die dazu gezogenen Linien durchschneiden (§. 24.), nach allen Ecken die Linien O C, O D u. s. f. Nun ist (Vstz.) A B = B C = C D u. s. f. imgleichen A = B = C u. s. f. Daher ist x = m (= ½ A), folglich O A = O B. (§. 32. N. 2.). In dem benachbarten Dreieck O B C ist demnach O B = O A, B C = A B und p = m (= ½ A), daher O C = O B, q = p (= ½ A) (§. 30. N. 2.). So fährt man von jedem Dreiecke auf das benachbarte zu schließen fort, woraus den folgt, das die aus O gezogenen Linien alle gleich sind, die Punkte A, B, C, D u. s. f. von O gleich weit abstehen, und ein Kreis durch sie möglich ist. (§. 11. N. 2.).

§. 68.

Die Seite Fig. 44. (AB) des regulären Sechseckes ist dem Halbmesser (AC) des dergestalt umschriebenen Kreises gleich.

Der Bogen A B ist ⅙ des Umfanges (§. 59. N. 2.) = 60° (§. 62.) Wenn man nun den Halbmesser CB zieht, so hält in dem Dreiecke A C B der Winkel C ebenfalls 60°; hiermit A + B = 120° (§. 28.). Nun ist aber A = B (§. 33. N. 1.); also jeder von ihnen = 60° daher A B = A C. (§. 35. N. 2.)

Auf-

## Aufgaben.

### §. 69.

Einen Kreisbogen Fig. 45. (AB) in zween gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man suche zween Punkte P und Q, die von A und B gleich weit abstehen, und verbinde sie durch eine gerade Linie PQ; so ist AR=RB.

Man hat PQ durch die Mitte der Sehne AB senkrecht gezogen (§. 45.). Daher §. 65. N. 1.

### §. 70.

Eines Bogens Fig. 46. (AB) Mittelpunkt zu finden.

Aufl. Man schneide darin zwei Stücke AC und DB nach Belieben ab, und theile jedes derselben in zween gleiche Theile; so werden die Linien PQ und RS, wodurch es geschieht, einander in dem Mittelpunkte O durchschneiden. (§. 65. N. 1.)

### §. 71.

Durch jede drei gegebene Punkte Fig. 47. (A, B und C), die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Zu zweenen beliebigen derselben (A und B) suche man zween Punkte (P und Q); zu dem dritten derselben (C) und einen der vorigen (B) aber zween andere Punkte (R und S), die gleich weit davon abstehen. Der Punkt O, wo die Linien (PQ und RS) einander durchschneiden, ist der Mittelpunkt, und jede der Linien OA, OB, OC ein Halbmesser.

Man ziehe OA, OB, OC, AB, BC. Alsdenn ist in den Dreiecken ODA und ODB die Seite OD=OD, ferner DA=DB und r=x (§. 45.).

Daher (§. 30. N. 2.) O A = O B. In den Dreiecken O EB und OEC aber ist O E = O E, E B = E C und y = z, daher O C = O B = O A. Also stehen A, B und C gleich weit von O ab, und §. 11. N. 2.

## §. 72.

Einem Kreise ein reguläres Vieleck von einer bestimmten Zahl Seiten einzuschreiben.

Aufl. Es kommt darauf an, daß man die Größe der Sehne zu finden wisse, die sich in dem Kreise so viel mahl herumtragen läßt, als das Vieleck Seiten haben soll. (§. 67. N. 1.)

1) Für das reguläre Viereck (Quadrat) findet man dieselbe, wenn man zween Durchmesser auf einander senkrecht zieht und ihre Enden verbindet. §§. 64. N. 2. und 30. N. 2.)

2) Für das reguläre Sechseck ist der Halbmesser die herum zu tragende Sehne. (§. 68.)

3) Die Diagonale, welche die Enden zwoer gränzenden Seiten des Sechseckes verbindet, ist die Seite des regulären (gleichseitigen) Dreieckes.

4) Durch die Seite eines jeden regulären Vieleckes findet man die Seite eines andern, welches zwei mahl so viel Seiten hat, wenn man den Bogen, den seine Seite bespannt, in zween gleiche Theile theilt, (§. 69.), und die Sehne des halb so großen Bogens nimmt.

## §. 73.

Man hat auch Geometrische Methoden die Seite des regulären Fünfeckes, und durch die genannten Vielecke verschiedener andern Seiten zu finden, welches sich aber aus den bisherigen Gründen theils gar nicht, theils nicht ohne Weitläuftigkeit erklären lassen. Mechanisch läßt sich jedes reguläre Vieleck dem Zirkel genau

nau genug einschreiben, wenn man die herumzutragende Sehne, d. i. seine Seite so lange größer oder kleiner macht, bis der Versuch gelingt.

§. 74.

Auf einer geraden Linie Fig. 48. (A B) ein reguläres Vieleck, dessen Polygonwinkel (m) gegeben wird, aufzurichten

Aufl. Man mache B = m (§. 43) und BC = AB. Alsdenn beschreibe man durch die Punkte A, B und C einen Kreis, und trage die Sehne A B = B C, so oft es angeht, darin herum. (§. 67. N. 1.)

§. 75.

Die Auflösung setzt voraus, daß der Polygonwinkel richtig, das ist so gegeben werde, wie es die Zahl der Seiten (nach §. 40.) erfordert. Man erfährt nämlich die Größe eines jeden Winkels, wenn man ihrer aller Summe durch die Zahl der Seiten theilt. So findet man für den Winkel des regulären

| | |
|---|---|
| Dreieckes 60° | Sechseckes 120° |
| Viereckes 90° | Siebeneckes $128\frac{4}{7}$° |
| Fünfeckes 108° | Achteckes 135° u. s. f. |

Von welchen Winkeln sich verschiedene Geometrisch beschreiben lassen.

## IV. Von der Aehnlichkeit geradeliniger Figuren und den Proportionallinien.

§. 76.

Dieser Abschnitt setzt die Lehre von der Proportion (Rechenk. §. 82. folg.) voraus; wobei wir vorläuffig anmerken, daß, wenn vier Größen (A, B, C, D) proportional sind, man dieses so anzuzeigen pflegt: A : B = C : D.

## §. 77.

Insbesondere werden wir uns hier folgender Sätze bedienen:

1) Gleichvielfache oder gleich große Stücke zwoer Größen verhalten sich unter einander wie die Grössen selbst. Z. B. A: B = 100 A: 100 B = $\frac{1}{12}$ A: $\frac{1}{12}$ B.

2) Wenn alle vier Größen gleichartig sind, so daß sich unter ihnen eine Vergleichung anstellen läßt: so verhält sich auch (Alternando) das 1ste Glied zum 3ten, wie das zweite zum 4ten; weil diese vermöge der Proportion selbst gleich vielfache oder gleich große Stücke von jenen sind. Wenn z. B. A: B = C: D, so ist auch A: C = B: D.

3) Wenn zwei Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie auch einander selbst gleich. Wenn A: B = C: D, und E: F = C: D, so ist A: B = E: F.

4) Wenn zwo Größen zu einer dritten einerlei Verhältniß haben, so sind sie gleich. Wenn A: B = C: D, und A: B = P: D, so ist C = P.

5) Wenn zwo Größen, zwischen zwo andere gesetzt mit ihnen eine Proportion ausmachen: so nennet man so wohl jene diesen, als diese jenen Reciprok. Wenn A: B = C: D, so sind die Größen A und D den Größen B und C, und diese jenen reciprok.

## §. 78.

Man nennet geradelinige Figuren einander ähnlich, wenn alle Winkel der einen den Winkeln der andern in eben der Ordnung genommen gleich sind, und die Seiten der einen sich unter einander

ander verhalten, wie die gleich gelegenen Seiten der andern. Welche Beschaffenheit der Figuren man durch Zwischensetzung dieses Zeichens ∽ zu bemerken pflegt.

## §. 79.

Wenn in zwoen Figuren Fig. 49. (ABCD und abcd) AB : BC = ab : bc, AB : CD = ab : cd u. s. f. so ist auch AB : ab = BC : bc, AB : ab = CD : cd u. s. f. und ist dieses, so ist jenes (§. 77. N. 2.). Daher sind die gleichgelegenen Seiten ähnlicher Figuren einander proportional. Und wenn, bei der Gleichheit der Winkel zwoer Figuren, die Seiten der einen den gleichgelegenen Seiten der andern proportional sind, so sind die Figuren ähnlich.

## §. 80.

Wenn man aus einem Punkte Fig. 50 (D) in einer Seite (AB) eines Dreieckes (ABC) mit einer von den andern Seiten (BC) eine Parallellinie (DE) zieht: so sind die Seiten des dadurch abgeschnittenen Dreieckes (ADE) den Seiten des ganzen (ABC) proportional. (AE : AC = ED : CB = AD : AB.).

Man setze, daß A B in eine solche Anzahl gleicher Theile getheilt wäre, daß ein Theilungspunkt in D fiele (welches unter der schon §. 61. bemerkten Bedingung jederzeit gesetzt werden kann), und daß aus allen Theilungspunkten mit den beiden andern Seiten (A C und C B) Parallellinien gezogen würden: so entstehen eines Theils die Dreiecke APF, FQG, GRD, DSH, HIB, andern Theils die Parallellogramme FC, GM, DL, HK, imgleichen FO, GE, DN, HC (§. 35.). In den Dreiecken ist A = 2 = 4 = 6 = 8, und 1 = 3 = 5 = 7 = B (§. 23. N. 2.). Wie auch

(Vstg) A F = F G = G D = D H = H B. Daher (§ 30 N. 1) P F = Q G = R D = S H = I B, und A P = F Q = G R = D S = H I. Nun ist in den erstgenannten Parallelogrammen P F = C M, Q G = M L, R D = L K, S H = K I. (§. 37.); Daher C M = M L = L K = K I = I B. Eben so ist in den andern Parallelogrammen F Q = P O, G R = O E, D S = E N, H I = N C. Also A P = P O = O E = E N = N C. Die Theile A P, P O u. s. f C M, M L u s. f. A F, F G u. s. f. sind also gleich große Stücke derer Linien, wozu sie gehören; und A E begreift eben so viele solcher Theile von A C, als E D (= C K. §. 37.) von C B, und als A D von A B in sich. Das ist A E : A C = E D : C B = A D : A B (hier = 3 : 5. §. 8. N. 8).

## §. 81.

Da auch 9 = C, 5 = B (§. 23. N. 2.) und A = A, so ist ein Dreieck (AED), welches durch eine Parallellinie (DE) mit einer von den Seiten (BC) des andern (ABC) von ihm abgeschnitten wird, demselben ähnlich. (§. 79.)

## §. 82.

Wenn in zweien Dreiecken Fig. 51. (abc und ABC) entweder

1) zween Winkel (a und b) des einen zweenen Winkeln (A und B) des andern gleich; oder

2) zwo Seiten (ab und ac) des einen zwoen Seiten (AB und AC) des andern proportional, und die Winkel darzwischen (a und A) gleich; oder

3) alle Seiten des einen den Seiten des andern proportional sind:

so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Man

Man trage die Seite a b des kleineren Dreieckes auf die Seite A B des größeren, im ersten Falle als auf die Seite, woran die gleichen Winkel liegen, im zweiten und dritten, als auf die, womit sie in der Proportion verglichen wird, aus einem der daran liegenden Winkel A gegen D, und ziehe D E mit B C parallel. So ist das Dreieck A D E ∽ A B C, (§. 81.). Es ist aber

1) a b = A D, a = A, b = B (Vstzg.) = x (§. 23. N. 2.) Daher kann das Dreieck a b c das andere A D E decken (30. N. 1.), und ist folglich ebenfalls ∽ A B C

2) a = A, a b = A D und a b (= A D) : A B = a c : A C (Vstzg.). Da nun (in dem Dreiecke A D E) A D : A B = A E : A C (§. 79.), so ist auch noch a c = A E (§. 77. N. 4.). Folglich (§. 30. N. 2.) schließt man wie vorhin.

3) a b = A D und a c = A E wie N. 2. überdem ist (Vstzg.) a b (= A D) : A B = b c : B C und in dem Dreieck A D E ist A D : A B = D E : B C (§. 79.). Daher auch b c = D E (§. 77. N. 4.). Man schließt also (§. 30. N. 3.) ebenfalls, wie N. 1.

## §. 83.

Die gerade Linie Fig. 52. (BD), welche in einem rechtwinklichen Dreieck (A B C) aus der Spitze des rechten Winkels (B) auf die Hypothenuse (AC) senkrecht gezogen wird, theilet dasselbe in zwei Dreiecke (ADB und BDC), welche so wohl dem ganzen (ABC), als einander ähnlich sind.

Die Winkel B und A des Dreieckes A B C sind den Winkeln D und A des Dreieckes A D B; die Winkel B und C des ersteren aber den Winkeln D und C des Dreieckes B D C gleich. Daher haben A B D und B D C mit A B C (§. 29. N. 3.), und unter einander gleiche Winkel, und sind alle drei ähnlich. (§. 82. N. 1.)

## §. 84.

Diese senkrechte Linie aber ist selbst die mitlere stete Proportionallinie zwischen den Theilen der Hypothenuse (§. 78.) AD : DB = DB : DC.

## §. 85.

1) Die vielseitigen Figuren Fig. 53. (ABCDE und abcde) deren Seiten sich durch Diagonalen zu Seiten gleichgeordneter ähnlicher Dreiecke machen lassen, sind einander ähnlich; und

2) ähnlicher Figuren Seiten lassen sich durch Diagonalen zu Seiten gleichgeordneter ähnlicher Dreiecke machen.

1) Wenn die Dreiecke ACB ∽ acb, ACE ∽ ace und EDC ∽ edc sind: so sind die Winkel beider Figuren theils an sich selbst, wie D = d, B = b, theils als Summen gleicher Winkel, wie die übrigen, einander gleich. In den Dreiecken ACB, acb ist nicht nur AB : ab = BC : bc, sondern auch AB : ab = AC : ac. Da nun in den benachbarten (ACE, ace) dieses AC : ac = AE : ae, so ist auch AB : ab = AE : ae (§. 77. N. 2.) So sieht man mit Hülfe der Diagonalen, daß alle Seiten der einen Figur den Seiten der andern proportional, und hiemit die Figuren ähnlich sind. (§. 78.)

2). AB : ab = BC : bc und B = b (Vstzg). Daher das Dreieck ABC ∽ abc (§. 82. N. 2.). Folglich m = q, und da (Vstzg) m + r = p + q, auch r = p. (§. 8. N. 5.). Da ferner AB : ab = AE : ae, und (in ABC, abc) AB : ab = AC : ac, so ist AE : ae = AC : ac. Hiermit das Dreieck ACE ∽ ace (§. 82. N. 2.). Wenn man so fortfährt, so sieht man leicht, daß alle Dreiecke der einen Figur den gleichgeordneten der andern ähnlich sind.

§. 86.

## §. 86.

1) Wenn sich zwo Sehnen Fig 54. N. 1. (AB und CD) eines Kreises innerhalb desselben (in O) durchschneiden; so sind die Theile der einen (CO, OD), den Theilen der andern (AO, OB) reciprok, (AO : OC = OD : OB).

2) Durchschneiden sich aber zwo verlängerte Sehnen N. 2. (AB und CD) außer dem Kreise (in O), so verhalten sich die äußeren Stücke (AO, OC) umgekehrt wie die ganzen Linien (OD und OB), wozu sie gehören. (AO : OC = OD : OB)

1. 2) Man ziehe AD und BC; so sind in den Dreiecken AOD und COB die Winkel O = O und B = D (§. 64. N. 1.). Daher AO : OC = OD : OB, (§. 82. N. 1.)

## §. 87.

Die Halbmesser Fig. 55. (ac und AC) verschiedener Kreise haben zu ihren Umfängen einerlei Verhältniß.

ab und AB sein gleich große Stücke ihrer Umfänge, aber so klein, daß sie ohne merklichen Irrthum für gerade Linien gelten können. Wenn man nun die Halbmesser cb und CB zieht, so sind die Winkel c und C gleich (§. 60.), und die Dreiecke abc und ABC ähnlich (§. 11. N. 1. und 82. N. 2.); daher ac : AC = ab : AB. Hiemit ac zu AC wie die Zahl derer ab, die den ersteren Umfang ausmachen, zu der gleichen Zahl AB, die den andern ausmachen (§. 77. N. 1.). Oder: der Halbmesser ac zu seinem Umfange, wie der Halbmesser AC zu dem seinigen (Ebendas. N. 2.).

## Aufgaben.

### §. 88.

Zu drei gegebenen geraden Linien Fig. 56. (AB, AC, AD) die vierte Proportionallinie zu finden.

Aufl. Aus dem Scheitel (A) eines beliebigen Winkels trage man die beiden ersten auf den einen Schenkel desselben in B und C, und die dritte auf den andern Schenkel in D. Alsdenn verbinde man BD, und ziehe aus C damit eine Parallellinie CP, so ist AP die gesuchte. (§. 81.)

### §. 89.

Eine gerade Linie Fig. 57. (AB) nach eben dem Verhältniß einzutheilen, wonach eine andere (AP) getheilt ist.

Aufl. Man setze beide unter einem beliebigen Winkel A zusammen, verbinde ihre Enden B und P durch eine gerade Linie, und ziehe aus den Theilungspunkten M, N von AP mit ihr Parallellinien MD, NC; so schneiden diese die verlangten Theile ab.

### §. 90.

Um eine gerade Linie Fig. 58. (AB) in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, darf man nur eben so viele gleiche Theile AP, PQ u. s. f. von beliebiger Größe auf eine andere Linie AZ tragen, und hernach AB nach eben dem Verhältniß theilen, wonach AT, die Summe der aufgetragenen Theile, getheilt ist.

§. 91.

§. 91.

Zwischen zwoen geraden Linien Fig. 59. (AB und BC) eine mitlere stete Proportionallinie zu finden.

Aufl. Man setze beide in gerader Linie an einander, und theile ihre Summe AC in zween gleiche Theile in E. Aus E beschreibe man mit der Eröffnung EA = EC einen halben Kreis über AC, und richte aus B die Linie BD senkrecht bis an den Umfang auf. Diese ist die gesuchte.

Man ziehe AD und DC, so ist ADC bei D rechtwinklich. (§. 64. N. 2.) Folglich (§. 84.)

§. 92.

Auf einer geraden Linie Fig. 60. ab ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ABC ähnlich sei, so daß ab und AB gleichgelegene Seiten werden.

Aufl. 1) Man mache a = A und b = B (§. 43.), und ziehe ihre Schenkel fort, bis sie sich in c durchschneiden; so ist das Dreieck abc ∽ ABC (§. 82. N. 1.)

2) Man suche zu AB, ab und AC, imgleichen zu AB, ab, und BC die 4ten Proportionallien (§. 88.) und beschreibe durch diese nebst ab ein Dreieck. (§. 41. und §. 82. N. 3.)

3) Wir übergehen andere nicht so nützliche Arten dieses zu leisten.

§. 93.

Auf einer geraden Linie Fig. 53. ab eine geradelinige Figur zu beschreiben, die einer gegebenen

(A

(ABCDE) ähnlich sei, so daß ab und AB gleichgelegene Seiten werden.

Aufl. 1) Man bringe die gegebene Figur durch (allenfalls nur eingebildete) Diagonalen auf Dreiecke und beschreibe nach ihrer Ordnung ihnen ähnliche; so wird abcde ∽ ABCDE. (§. 85. N. 1.)

2) Eben dieses kann durch proportionale Seiten und gleiche Winkel darzwischen geleistet werden, welches wir auszuführen unnöthig halten.

## V. Von dem Längenmaaße.

### §. 94.

Die Geometer bedienen sich im Großen des landüblichen Längenmaaßes; hier zu Lande z. B. meistentheils der Rheinländischen Ruthe und ihrer Theile. Aber, anstatt der sonst gewöhnlichen Eintheilung des Maaßes in 12 gleiche Theile, theilen sie die Ruthe in 10 Fuß, den Fuß in 10 Zolle, den Zoll in 10 Linien oder Striche u. s. f. Die Ruthen werden wie die Grade, die Fusse wie Minuten, die Zolle wie Sekunden u. s. f. (§. 15.) angedeutet. Z. B. $16^\circ\ 5'$ sind 16 Ruthen und 5 Fuß.

### §. 95.

Die Bequemlichkeit dieser Eintheilung des Maasses besteht darin, daß man dabei der Bringung auf andere Benennungen überhoben ist; indem man nur die letzte Ziffer eines Maasses von geringerer Benennung zu dieser, jede der folgenden aber zu der nächstfolgenden höheren Benennung zu

ziehen

ziehen hat; dagegen man eine Zahl von verschiedenen Benennungen zusammen nach der geringsten von ihnen lesen kann, wenn entweder keine dazwischen fehlen, oder die fehlenden durch Nullen ersetzt werden. Z. B. 16584‴ sind 16° 5′ 8″ 4‴. Hingegen 5° 4″ 6‴ oder 5° 0′ 4″ 6‴ sind 5046‴.

§. 96.

Aber eben diese Bequemlichkeit erfordert auch eine gleiche Eintheilung desjenigen Maasses, dessen man sich auf dem Papiere bedient. Wonach denn die gewöhnlichen **verjüngten Maaßstäbe** eingerichtet werden, von denen alsbald geredet werden soll.

§. 97.

Die Verwandlung eines Maasses in das andere z. B. eines fremden in das Rheinländische erfordert eine Kenntniß ihres Verhältnisses unter einander, welche Verhältnisse man bei praktischen Schriftstellern, oder in besondern Tabellen findet.

Die Sache selbst geschieht nach Rechenk. §. 86. u. folg. Wir begnügen uns damit die Verwandlung zwölftheiligen und zehntheiligen Maasses in einander durch ein Paar Beispiele zu erläutern.

§. 98.

Gesetzt, man sollte 25° 11′ 5″ zwölftheiligen Maasses in zehntheiliges verwandeln; so bedürfen die Ruthen keiner Verwandlung, und hat man zur Regeldetri die Sätze

12′ — 11′ 5″ — 10′

wodurch man (Rechenk. §. 86.) 9′ 5″ 1‴ 3ⁱᵛ u. s. f., also insgesammt 259513ⁱᵛ erhält. Sollte man hingegen 9° 6′ 3″ 4‴ zehentheiligen Maasses in zwölftheiliges verwandeln, so schließt man

10′

10′ — 634‴ — 12′ und erhält 7′ 7″ 3‴ 6ᴵⱽ u. s. f.,
also insgesammt 9° 7′ 7″ 3‴ 6ᴵⱽ.

## Aufgabe.

### §. 99.

Einen verjüngten Maaßstab zu verfertigen.

Aufl. Man verbinde zwo gerade Linien Fig. 61. Ax und Az unter einem beliebigen oder der Gewohnheit gemäß, einem rechten Winkel, und trage auf eine jede derselben 10 gleiche Theile von beliebigen Längen A bis o und A bis 10.

Die Linie A o trage man, so oft es angeht, von o gegen X, und ziehe durch ihre Endpunkte o, 10, 20 u. s. f. mit AZ Parallellinien. Hierauf verbinde man 9, den ersten Theilungspunkt von A o mit 10, dem letzteren von AZ durch eine gerade Linie, und ziehe aus allen übrigen Theilungspunkten von A o damit parallel. Endlich setze man die Zahlen dabei, wie man aus der Figur sieht.

### §. 100.

Die Einrichtung dieses Maaßstabes gründet sich theils auf §. 80. theils §. 37. Dessen weitere Ausführung nebst der Anweisung seines Gebrauches dem mündlichen Vortrage vorbehalten bleiben.

### §. 101.

Da sich jede gegebene gerade Linie mit Hülfe eines Maaßstabes durch eine Zahl ausdrücken läßt: so kann man die obigen Aufgaben (§. 88. folg.) auch Arithmetisch ausführen; nämlich §. 88. durch die Regeldetri, §. 89. durch die Gesellschaftsrechnung, §. 90. durch die gemeine Theilung, und §. 91. durch die Ausziehung der Quadratwurzel.

# Der Geometrie

## Zweiter Theil.

## Von den ebenen Flächen.

§. 102.

Bisher sind die Figuren nach ihren Seiten und Winkeln betrachtet worden; in der Folge wird auf ihre Größe, d. i. den darin enthaltenen Flächenraum gesehen werden. Wobei die Geometrie den Vortheil gewähret, daß sie dieses durch Betrachtung bloßer geraden Linien leisten, und hiermit Vergleichungen unter den Figuren in Absicht ihrer Größe anstellen lehret.

### I. Von den Dreiecken und Parallelogrammen.

§. 103.

Die Dreiecke, denen eines von den oben (§. 30.) angegebenen Kennzeichen ihrer Gleichheit zukommt, sind auch von gleichem Flächen Inhalt; denn sie können einander decken.

§. 104.

Die Grundlinie eines Dreieckes Fig. 62. (A B C) oder Parallelograms (A E) kann jede

Seite (A B) desselben seyn. Seine Höhe aber ist die gerade Linie (D C), welche von der (nöthigen Falles fortgezogenen) Grundlinie senkrecht aufgerichtet wird, und bis an die gegenüberstehende Ecke (C) des Dreieckes oder Seite (C E) des Parallelograms reicht.

§. 105.

Wenn gleich hohe Dreiecke Fig. 63. (ABC und D E F) oder Parallelogramme (A G und D H) mit ihren Grundlinien (A B und DE) in eine gerade Linie (A E) gestellt werden: so liegen die gegenüberstehenden Spitzen (C und F) der Dreiecke, oder Seiten (G C und F H) der Parallelogramme in einer mit der Grundlinie parallelen Linie.

Man ziehe die Höhen C I und F K, und verbinde C F. Alsdenn sind C I und F K gleich (Vstzg) und wegen der Winkel um I und K parallel (§. 22.). Daher ist I K F C ein Parallelogram (§. 39. N. 2.), und C F mit I K oder A E parallel.

In den Parallelogrammen A G und D H aber ist auch C G durch den Punkt C, und F H durch F mit A E parallel. Daher fallen C G und C F mit F H, und mit einander in eine gerade Linie (§. 21. N. 1.).

§. 106.

Daher können gleich hohe Dreiecke oder Parallelogramme jederzeit zwischen zwo parallellinien gestellt werden; und stehen dieselben zwischen Parallellinien: so sind ihre Höhen (C I und F K) als gegenüberliegende Seiten eines Parallelograms gleich. (§. 37.).

§. 107.

## §. 107.

Die Parallelogramme Fig. 64. N. 1. und 2. (AC und AE), deren Grundlinien und Höhen gleich sind, haben einerlei Flächeninhalt.

Sie können jederzeit auf eine Grundlinie AB (§. 10. N. 2.) zwischen zwo Parallellinien AB und DE gestellt werden, da denn in den Dreiecken DAF und CBE die Seiten DA = CB, und AF = BE. Da auch DC = FE = AB (§. 37.), so ist, je nachdem DC und FE (wie N. 1.) in einander, oder (wie N. 2.) außer einander fallen DC — FC = FE — FC, oder DC + FC = FE + FC, das ist DF = CE. Daher das Dreieck DAF = CBE (§. 30. N. 3. und 103.). Legt man nun diesen Dreiecken im ersten Falle ABCF zu, und legt man ihnen im 2ten AOB zu, und nimmt ihnen COF weg: so ist auch das Parallelogram AC = AE. (§. 8. N. 4. und 5.)

## §. 108.

1. Die Parallelogramme Fig. 65. N. 1. (AC und HF) deren Höhen (CI und HK) gleich sind, verhalten sich unter einander, wie ihre Grundlinien (AB und EF).

2. Sind aber ihre Grundlinien N. 2. (CI und HK) gleich, so verhalten sie sich, wie die Höhen (AB und EF).

Man setze, daß N. 1. und 2. AB dergestalt in gleiche Theile getheilt würde, daß EF gerade eine gewisse Anzahl eben solcher Theile enthielte, welches unter der (§. 61.) schon bemerkten Bedingung gesetzt werden kann: so verhalten sich AB und EF, wie die Zahlen ihrer Theile (§ 8 N. 8.). Zieht man nun aus allen Theilungspunkten in dem Parallelogram AC mit AD, und in HF mit GF Parallellinien, so werden dieselben in so viel kleine Parallelogramme zerschnitten, als AB und EF Theile haben; und da diese alle gleiche Grund-

linien und Höhen haben (Vſtzg und §. 37.), hiermit gleich groß sind (§. 107.): so verhalten sich A C und H F, wie die Zahlen der darin enthaltenen kleinen Parallelogramme (§. 8. N. 8.), das ist wie die Zahlen der Theile von A B und E F; also wie diese Linien selbst.

§. 109.

Wenn man die Verhältnisse sowohl der Grundlinien Fig. 66. (A B und F G) als der Höhen (C E und I K) zweier Parallelogramme (A C und H F) durch die Zahlen der darin enthaltenen gleichen Theile ausdrückt: so verhalten sich die Parallelogramme überhaupt unter einander, wie die Vielfache der Grundlinie eines jeden mit seiner Höhe.

Man verfahre mit den Grundlinien und Höhen, wie §. 108., und ziehe durch ihre Theilungspunkte Parallellinien, wie vorhin; so wird durch die ersteren derselben jedes Parallelogram in so viele Schichten kleiner Parallelogramme getheilt, als die Grundlinie Theile hat, und jede Schichte enthält ihrer so viele, als Theile in seiner Höhe sind. Da aber alle diese kleine Parallelogramme einander gleich sind (§. 107.), so ist das Verhältniß ihrer Zahlen in jedem der vorgegebenen Parallelogramme das Verhältniß der Parallelogramme selbst (§. 8. N. 8.). Man sieht aber leicht, daß man, um diese Zahlen zu erforschen, die Zahlen der Schichten mit den Zahlen der darin enthaltenen Theile, das ist: die Zahl der Grundlinie eines jeden mit der Zahl seiner Höhe vervielfältigen muß.

§. 110.

Dieser Satz lautet mehr Geometrisch, wenn man ihn so ausspricht: **Die Parallelogramme stehen in einem aus den Verhältnissen ihrer Grundlinien und Höhen zusammengesetzten Verhältniß.** Wir haben Anfängern zu Gefallen jenen Ausdruck erwählet, der eigentlich eine Folge aus diesem ist. (Rechenkunst §. 105.)

§. 111.

Daher verhalten sich die Quadrate unter einander wie die Quadratzahlen ihrer Seiten.

§. 112.

Jedes Dreieck Fig. 62. (ABC) ist die Hälfte eines Parallelograms, welches mit ihm gleiche Grundlinie (AB) und Höhe (CD) hat.

Man ziehe durch C und B mit AB und CD Parallellinien, so entsteht das Parallelogram AE, dessen Grundlinie und Höhe ebenfalls AB und CD sind.

Nun ist (in den Dreiecken ABC und ECB) AC = BE, AB = CE (§. 37.) und CB = CB. Daher sind beide gleich (§. 30. N. 3.) und jedes die Hälfte des Parallelograms AE, und eines jeden andern, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. (§. 107.)

§. 113.

Hieraus folgt

1) daß auch die Dreiecke gleich sind, welche gleiche Grundlinien und Höhen haben. (§. 107.)

2) Daß die Dreiecke, deren Höhen gleich sind, sich wie die Grundlinien, und deren Grundlinien gleich sind, wie die Höhen verhalten. (§. 108.)

3) Daß, wenn man die Verhältnisse der Grundlinien und Höhen durch Zahlen ausdrückt, die Dreiecke selbst sich wie die Vielfache der Grundlinie eines jeden mit seiner Höhe verhalten. (§. 109.)

§. 114.

1) Wenn die Grundlinie Fig. 67. N. 1. (AB) und Höhe (DE) eines Dreieckes (ABD) der Grundlinie (FG) und Höhe (IK) des andern (FGI) reciprok sind: so sind die Dreiecke gleich.

 2) Glei-

2) Gleicher Dreiecke Grundlinien und Höhen sind einander reciprok.

3) Beide Sätze gelten auch von den Parallelogrammen (AC und FH) und deren Grundlinien und Höhen.

Aus dem Scheitel N. 2. L eines rechten Winkels trage man auf den einen Schenkel beide Grundlinien AB und FG in M und O, auf den andern aber beide Höhen DE und IK in N und P, und verbinde sowohl PO und NM, als auch PM und NO: so ist das Dreieck LNM = ABD, und LOP = FGI (§. 113. N. 1.) Nun ist

1) LM : LO = LP : LN (Vſtzg) und L = L. Daher das Dreieck LPM ∽ LNO (§ 82. N. 2.), der Winkel LPM = LNO, PM mit NO parallel (§. 22. N. 2.), und die Dreiecke OMN und NPO, deren gemeinschaftliche Grundlinie ON ist, einander gleich. (§. 113. N. 1.) Legt man ihnen also LON zu, so ist auch das Dreieck LNM = LPO, oder ADB = FGI.

2) Das Dreieck LNM = LPO (Vſtzg), und, wenn man beiden LON wegnimmt, PON = MNO; hiermit dieser ihre Höhen gleich (§. 113. N. 2.), NO mit PM parallel (§. 105.), und LM : LO = LP : LN (§. 80.), oder AB : FG = KI : DE.

3) Beides muß auch von den Parallelogrammen AC und FH gelten, (§. 112.) deren Grundlinien und Höhen eben dieselben sind.

## §. 115.

Daher ist jedes Rechteck einem Quadrate gleich, dessen Seite die mitlere stete proportionallinie zwischen seinen Seiten ist.

## §. 116.

In jedem rechtwinklichen Dreieck Fig. 68. (ABC) ist das Quadrat der Hypothenuse (AC) den

den Quadraten beider Katheten (A B und B C zusammengenommen gleich.

Man beschreibe auf jeder Seite ihr Quadrat auswärts, und ziehe BD senkrecht durch AC; so sind AD und D C Rechtecke. Wegen der rechten Winkel um B und bei A und C sind B C und B K mit I A, A B und B H aber mit C G parallel (§. 22. N. 2. 3.); daher auch K C und A H gerade Linien ausmachen (§. 21. N. 1.)

Hierauf ziehe man I C, B E, B F, G A.

Alsdenn sind in den Dreiecken I A C und B A E die Seiten I A = A B und A C = A E (§. 35.). Die Winkel I A C und A B E sind jeder aus dem Winkel B A C und einem rechten zusammengesetzt, folglich gleich. Daher das Dreieck I A C = B A E (§. 30. N. 2.). Das erstere steht mit dem Quadrat I B auf der Grundlinie I A zwischen I A und K C, das andere mit dem Rechteck A D auf A E zwischen A E und B D; daher sie deren Hälften sind (§. 112.), und das Quadrat I B dem Rechteck A D gleich ist. (§. 77. N. 4.).

Eben so sieht man daß das Quadrat B G dem Rechtecke D C gleich ist, und folglich I B + B G das Quadrat A F der Hypothenuse ausmachen.

## II. Von dem Kreise.

### §. 117.

Wenn die Grundlinie Fig. 69. (A B) eines Dreieckes (A B C) so groß ist als die Grundlinien (D E, G H, K L) mehrerer eben so hohen Dreiecke (D E F, G H I, K L M) zusammengenommen: so ist das erstere Dreieck den andern zusammengenommen gleich.

Denn wenn man A N = D E und N O = G H macht, wodurch O B = K L wird (Vstzg), und aus N und O nach C gerade Linien zieht, so werden die Dreiecke A N C = D E F, N O C = G H I und

COB=KLM (§. 113. 1.), Daher ABC=DEF+GHI+KLM.

§. 118.

1) Jeder Ausschnitt Fig. 70 (A C B) eines Kreises ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie so lang als der Bogen (A B), und dessen Höhe dem Halbmesser (A C) gleich ist.

2) Der ganze Kreis aber einem Dreiecke, dessen Grundlinie so lang als der ganze Umfang, und dessen Höhe der Halbmesser ist.

1) Man theile den Bogen in so kleine Theile A d d e u. s. f. daß jeder derselben von einer geraden Linie nicht merklich unterschieden ist (in unendlich viele Theile), und ziehe aus den Theilungspunkten die Halbmesser d C, e C u. s. f.; so wird der Ausschnitt in eine Menge Dreiecke verwandelt, deren Grundlinien zusammen den Bogen A B ausmachen, und deren Höhen von dem Halbmesser unendlich wenig verschieden, das ist, ihm gleich sind. Alle diese aber sind in einem Dreiecke enthalten, welches bei eben der Höhe die Summe ihrer Grundlinien zur Grundlinie hat. (§. 117.).

2) Der Kreis aber als die Summe mehrerer Ausschnitte muß eben so vielen dergleichen Dreiecken, folglich einem Dreiecke gleich sein, dessen Grundlinie so groß als die Summe aller ihrer Grundlinien, d. i. als der Umfang selbst, und dessen Höhe ihre Höhe, der Halbmesser ist.

§. 119.

Wenn die Grundlinien der (N. 1.) gedachten kleinen Dreiecke einander gleich gesetzt werden: so wird der Kreis ein reguläres Vieleck, sein Umfang der Umfang und sein Inhalt der Inhalt eines solchen (§. 67.)

III. Ver-

## III. Vergleichung ähnlicher Figuren.

### §. 120.

Aehnliche Dreiecke Fig. 71. (A D E und A B C verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ihrer gleichgelegenen Seiten. (A D und A B).

Man trage A D auf A B aus A in D, und ziehe D E mit B C parallel: so sind die Dreiecke A D E einander gänzlich gleich (§. 82. Bew. 1.). Auf A B beschreibe man ihr Quadrat (A G), mache A K = A D, und ziehe aus D mit B G und aus K mit A B parallel; so ist das Rechteck A I = A H (§. 107.). Endlich ziehe man E B. So finden folgende Proportionen statt, wobei Kürze halber Dk ein Dreieck, Rk ein Rechteck und Qt ein Quadrat bedeuten sollen:

1. Dk. A E D : Dk. A E B = A D : A B (§. 113. N. 2) = Qt. A F : Rk. A. H (§. 100) das ist = Qt. A F : Rk. A I.

2. Dk. A E B : Dk. A C B = A E : A C (§. 112. N. 2) = A D : A B (Vstzg) = Rk. I A : Qt. A G (§. 108.)

3. (Aus. 1.) Dk. A E D : Qt. A F = Dk. A E B : Rk. A I. (§. 77. N. 2.)

4. (Aus. 2.) Dk. A E B : Rk. A I = Dk. A C B : Qt. A G. (Ebds.)

5. (Aus. 3. 4.) Dk. A E D : Qt. A F = Dk. A C B : Qt. A G. (§. 77. N. 3.)

6. (Aus. 5.) Dk. A E D : Dk. A C B = Qt. A F : Qt. A G. (§. 77. N. 2.)

### §. 121.

Wenn vier Linien Fig. 71. (A E, A C, A D, A B) einander proportional sind: so sind es auch ihre Quadrate.

Aus der Spitze A eines beliebigen Winkels trage man A E und A C auf den einen, A D und A B aber auf den andern Schenkel, und verbinde E D und C B, so ist das Dk A E D ∽ A C B (§. 82. N. 2.). Da-

 her

her Dr. A E D : Dr. A C B = Qt. A E : Qt. A C, und Dr. A E D : Dr. A C B = Qt. A D : Qt. A B (§. 120.). Daher (§. 77. N. 3.) Qt. A E : Qt. A C = Qt. A D : Qt. A B.

## §. 122.

Wenn mehrere Verhältnisse (A : B, C : D u. s. f. P : Q) einander gleich sind: so verhält sich auch die Summe aller ersten Glieder (A + C u. s. f. + P) zur Summe aller zweiten (B + D u. s. f. + Q) wie jedes erste Glied zum zweiten (= A : B).

Es ist auch A : C = B : D (§. 77. N. 2.). Nun mag C ein Vielfaches, oder ein Stück, oder ein Vielfaches eines Stückes von A sein, so muß D vermöge der Proportion eben dasselbe von B sein. Was für eine Vervielfältigung des A also durch Zulegung des C vorgehen mag, so geht eben dieselbe mit B durch Zulegung des D vor. Daher (§. 77. N. 1) A + C : B + D = A : B. Z. B. Wenn C = $\frac{3}{4}$ A, so ist D = $\frac{3}{4}$ B; A + C = $\frac{7}{4}$ A, B + D = $\frac{7}{4}$ B, und $\frac{7}{4}$ A : $\frac{7}{4}$ B = A : B.

Welche Schlüße leicht auf die folgenden Glieder fortzusetzen sind.

## §. 123.

Aehnliche geradelinige Figuren Fig. 53. (A B C D E und a b c d e) verhalten sich unter einander, wie die Quadrate gleichgelegener Seiten. A B und a b.)

Man bringe sie durch Diagonalen auf ähnliche Dreiecke (§. 85. N. 2.). Alsdenn ist
Dr. A B C : Dr. a b c = Qt. A B : Qt. a b (§. 120.)
Dr. A C E : Dr. a c e = Qt. A E : Qt. a e
Dr. E C D : Dr. e c d = Qt. E D : Qt. e d Da aber

A B : a b = A E : a e = E D : e d (§. 79.) und daher Qt. A B : Qt. a b = Qt. A E : Qt. a e = Qt. E D : Qt. e d (§. 120.) so ist Dr. A B C + Dr. A C E + Dr. E C D : Dr. a b c + Dr. a c e + Dr. e c d.

§. 124.

Das ist, die eine Figur zu der andern = Qt. AB : Qt. a b. (§. 122.).

§. 124.

Die Kreise verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Ein Dreieck, dessen Grundlinie der halbe Umfang, und dessen Höhe der Halbmesser wäre, würde dem halben Kreise gleich sein (§. 118. N. 2. und 113 N. 2.).

Ein Rechteck von eben der Grundlinie und Höhe würde demnach den Inhalt des ganzen Kreises haben (§. 112.) Ein solches sei A D; A F aber das Quadrat des Halbmessers. So ist Rk. A D : Qt. A F = A B : A E (§. 108. N. 1.), d. i. (Vstzg.) wie der halbe Umfang zum Halbmesser. Da dieses Verhältniß in allen Kreisen einerlei ist (§. 87), so würde man, wenn K und k die Inhalte zweener Kreise, Q und q aber die Quadrate ihrer Halbmesser in eben der Ordnung wären, setzen können K : Q = k : q. Daher ist auch (§. 77. N. 2.) K : k = Q : q.

Da aber die Durchmesser sich unter einander verhalten, wie ihre Hälften, die Halbmesser: so sind auch ihre Quadrate dieser ihren Quadraten (§. 121.), und folglich den Inhalten der Kreise proportional.

§. 125.

Wenn die drei Seiten eines rechtwinklichen Dreieckes die Halbmesser oder Durchmesser eben so vieler Kreise, oder die gleichgelegenen Seiten ähnlicher Figuren sind: so ist die zur Hypothenuse gehörige Figur denen, die zu den Katheten gehören, zusammen genommen gleich.

Was für ein Stück der zur Hypothenuse gehörigen Figur auch die zu der einen Kathete gehörige sein mag, so muß jederzeit die andere das zur Ergänzung der erstgedachten noch fehlende sein, weil sie sich wie die Quadrate ihrer gleichgelegenen Seiten verhalten (§. 120.

 123.

123. 124.), diese aber die Quadrate der Seiten eines rechtwinklichen Dreieckes sind. (§. 116.).

# Aufgaben.

## Von Eintheilung und Verwandlung der Figuren.

### §. 126.

Ein Dreieck, oder ein Parallelogram Fig. 73. (A B C) in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Man theile eine beliebige Seite A B in so viele gleiche Theile (§. 60), und ziehe aus allen Theilungspunkten, in dem Dreiecke nach der gegenüber stehenden Spitze (C), in dem Parallelogram mit der angränzenden Seite (B C) parallel. (§. 113. N. 1. und 107.)

### §. 127.

Die Seite eines Quadrates zu finden, welches den Quadraten zwoer gegebenen Linien Fig. 74. (AB und AC) zusammen genommen gleich sei.

Aufl. Man setze die gegebenen Linien rechtwinklich an einander (§. 47.), und verbinde ihre Enden B und C; so ist BC die gesuchte. (§. 116.)

### §. 128.

Durch eine Wiederholung dieser Arbeit lassen sich so viel Quadrate, als man will, nach und nach in eines verwandeln.

### §. 129.

Die Seite eines Quadrates zu finden, Fig. 75. welches dem Unterschiede der Quadrate zwoer gegebenen Linien (AB und AC) gleich sei.

Aufl.

Aufl. Man theile die größere (AB) in zween gleiche Theile in D, und beschreibe aus D mit der Eröffnung DB = DA einen halben Kreis über ihr. Aus dem einen Ende des Durchmessers A durchschneide man den Umfang mit der Eröffnung AC, und verbinde CB, welche die gesuchte ist.

Denn, wenn man AC zieht, so ist das Dreieck ACB rechtwinklich (§. 64. N. 2.) Folglich (§. 116.)

§. 130.

Die Zahl der Seiten einer jeden geradelinigen Figur Fig. 76. (ABCDEF) um Eins zu vermindern.

Aufl. Man verbinde zwo Ecken N. 1. und 2. (A und E) die an eine (F) gränzen durch eine Diagonale, und ziehe mit dieser durch die mitlere (F) eine Parallellinie (HG); so wird diese die angränzenden (nöthigen Falles fortgezogenen) Seiten (DE und BA) in G und H durchschneiden. Den einen dieser Durchschnitte (G) verbinde man mit der andern Ecke (A); so ist ABCDG die verlangte Figur.

Denn da die Dreiecke AFE und AGE, und wenn man AOE davon wegnimmt, OFA und OGE gleich sind (§. 113. N. 1. und §. 8. N. 5.) so bleibt die Figur bei Wegnehmung des einen und Zulegung des andern gleich groß; und daß sie eine Seite weniger hat, ist offenbar.

§. 131.

Ein Rechteck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke Fig. 77. ABC gleich sei.

Man theile eine Seite AB in zween gleiche Theile, und richte sowohl aus ihrer Mitte D, als dem einen Ende A senkrechte gerade Linien auf.

Durch die Spitze C ziehe man mit AB eine Parallellinie, welche jene in F und E durchschneidet. Alsdenn ist ADEF das Rechteck.

Denn wenn man FE fortzieht, und BG senkrecht aufrichtet, so ist das Rk. AE = $\frac{1}{2}$ Rk. AG (§. 108, N. 1.), folglich = Dk. ABC. (§. 112.)

§. 132.

Ein Quadrat zu beschreiben, welches einem gegebenen Rechteck Fig. 78. (ABCD) gleich sei.

Aufl. Man verlängere AD und DC, und mache auf der ersten DG = DC. Ueber AG beschreibe man einen halben Kreis, welcher der verlängerten DC in E begegnet. Alsdenn ist DE die Seite, mit welcher das Quadrat beschrieben werden kann. (§. 51. und §. 115.)

§. 133.

Jedes geradelinige Vieleck läßt sich durch §. 130. nach und nach in ein Dreieck, durch 131 in ein Rechteck, und durch 132 in ein Quadrat verwandeln, welches man die **Quadratur der Figuren** nennet.

§. 134.

Die Quadratur des Kreises findet die Schwierigkeit, daß sich keine gerade Linie geometrisch finden läßt, welche genau dem Umfange gleich wäre. Doch siehe hiervon unten. (§. 148.)

## IV. Vom Flächenmaaße und Berechnung der Figuren.

§. 135.

Das natürliche Maaß einer Ebene ist gleichfalls eine Ebene. So willkührlich die Größe und Gestalt

Gestalt derselben ist: so bequem ist es, sich dazu eines Quadrates zu bedienen, dessen Seite eines von den gewöhnlichen Längenmaassen z. B. eine Ruthe, ein Fuß, eine Elle, eine Meile oder dergleichen ist, welches Quadrat nach dieser Seite eine Quadratruthe, ein Quadratfuß, eine Quadratelle, Meile oder dergl. genannt wird. Kürze halber werden wir das Flächenmaaß mit Zusetzung eines q bemerken. Z. B. $7^{\circ}$ q soll heißen 7 Quadratruthen.

## §. 136.

Wenn $1^{\circ}$ zu $10'$, $1'$ zu $10''$ u. s. f. gerechnet wird, so muß $1^{\circ}\,q = 100'\,q$, $1'\,q = 100''\,q$ sein. (§. 111.) Man erspart auch hierbei die Mühe der Bringung auf andere Benennungen, weil man bei Flächenmaasse von geringerer Benennung nur 2 Ziffern für eine jede Benennung von der Rechten gegen die Linke absondern darf. Z. B. $2850273'''$ q. enthalten $2^{\circ}\,85'\,2''\,73'''$ q. Bei Bringung eines Maasses von höherer Benennung auf geringere hingegen sieht man leicht, daß die ledig bleibenden Stellen mit Nullen auszufüllen sind. Z. B. $32^{\circ}\,4'\,19'''$ q sind $= 32040019'''$ q.

## §. 137.

Die Verwandlung eines Flächenmaasses in das andere setzt eine Kenntniß des Verhältnisses dererjenigen Längenmaasse, woher sie genommen sind, voraus. S. §. 97.

## Aufgaben.

## §. 138.

Ein Rechteck Fig. 21. (ABCD) zu berechnen.

Aufl.

Aufl. Man messe zwo an einander gränzende Seiten N. 1. (AB und AD) nach Längenmaasse von einerlei Benennung, und vervielfältige die gefundenen Zahlen mit einander; so wird das Vielfache anzeigen, wie viel solcher Quadrate, deren Seite man zum Maaß genommen, in dem Rechteck enthalten sein.

Wenn z. B. AB = 2° oder 20′, und AD = 1° 6′ oder 16′, so ist der Inhalt = 20 mahl 16 = 320′ q Man findet nämlich das Verhältniß des Quadrates, dessen Seite das Maaß ist, zu dem vorgegebenen Rechteck, wenn man sowohl die Seiten des ersteren d. i. 1 mit 1, als die Seiten des andern mit einander vervielfältiget. (§. 109.)

§. 139.

1) Zu Berechnung eines jeden schiefwinklichen Parallelograms nimmt man eine Seite für die Grundlinie, zieht die Höhe senkrecht darauf, mißt beide nach einerlei Längenmaaß und vervielfältiget sie mit einander. Es ist einem Rechtecke von derselben Grundlinie und Höhe gleich. (§. 107.)

2) Ein Quadrat aber zu berechnen mißt man blos eine Seite, und vervielfältiget sie mit sich selbst.

§. 140.

Ein Dreieck zu berechnen mißt man eine Seite als die Grundlinie und die darauf senkrechte Höhe, vervielfältiget sie mit einander, theilet aber das Vielfache mit 2. (§. 112.)

§. 141.

Ein jedes Viereck Fig. 79. (ABCD) zu berechnen, theilet man es durch eine Diagonale AC in

in zwei Dreiecke (ABC und ADC), rechnet jedes aus, und zählt ihre Inhalte zusammen. Wenn man die Diagonale für die Grundlinien nimmt, sie mit der Summe beider Höhen DE und BF vervielfältiget, und die Hälfte des Vielfachen nimmt, so hat man beider Dreiecke Inhalt auf einmahl.

§. 142.

Den Inhalt eines jeden geradelinigen Vieleckes zu finden, theilet man es durch Diagonalen oder andere Linien in Dreiecke, rechnet jedes derselben aus, und zählt zuletzt ihre Inhalte zusammen. Man kann sich dabei auch der Vortheile bedienen, daß man (nach §. 141.) zwei Dreiecke zusammen nimmt, und die Theilung der Inhalte mit 2 erst ganz zuletzt an ihrer Summe verrichtet.

## V. Von Berechnung des Kreises insbesondere.

§. 143.

Aus zwoen Seiten eines rechtwinklichen Dreieckes Fig. 74. (ABC) die dritte zu berechnen.

Aufl. Man messe die gegebenen Seiten nach einerlei Längenmaaß, und vervielfältige eine jede der gefundenen Zahlen mit sich selbst.

Wenn nun

1) aus den Katheten AC und AB die Hypothenuse CB gesucht wird: so zähle man beide Quadratzahlen zusammen. Wenn aber

2) aus der Hypothenuse CB und einer Kathete AC die andere AB gesucht wird, so zähle man die kleinere Quadratzahl von der größeren ab.

In

In beiden Fällen ziehe man aus dem herauskommenden die Quadratwurzel, welche die dritte Seite giebt. (§. 116.)

§. 144.

Aus der gegebenen Sehne Fig. 80. AB eines Bogens und dem Halbmesser CA die Sehne eines halb so großen Bogens zu berechnen.

Aufl. Wenn man den Halbmesser CD senkrecht durch AB zieht, so ist AE = $\frac{1}{2}$ AB, der Bogen AD = $\frac{1}{2}$ AB (§. 65. N. 2.), und die Sehne AD die gesuchte. Man theile demnach die Zahl AB mit 2, um AE zu finden. Hernach suche man in den rechtwinklichen Dreiecken AEC und AED durch AC und AE die Kathete CE, welche vom Halbmesser abgezogen ED übrig läßt; durch AE und ED aber die Hypothenuse AD.

§. 145.

So lassen sich durch die Sehne von 60°, welche der Seite des regulären Sechseckes und dem Halbmesser (§. 68.) gleich ist, nach und nach die Seiten des 12, 24, 48, 96 u. s. f. Eckes für eben den Kreis; und wenn man diese durch die Zahl aller Seiten vervielfältiget, der ganze Umfang eines solchen Vieleckes berechnen, der zwar etwas kleiner, als der Umfang des Kreises, aber desto weniger davon unterschieden sein wird, je mehrere Seiten das Vieleck hat. (§. 119.)

§. 146.

Fig. 81. AB sei die Seite irgend eines regulären Vieleckes. Man ziehe durch A und B Halbmesser

messer und verlängere sie; einen dritten ziehe man senkrecht auf AB, und durch dessen Ende D eine Linie EF senkrecht, bis an die erstern verlängerten Halbmesser; so ist diese EF die Seite eines dem Kreise umschriebenen regulären Vieleckes von eben so vielen Seiten, als das eingeschriebene hat. Es ist aber CH : CD = HB : DF oder = AB : EF, daher man EF durch CH, CD und AB vermittelst der Regeldetri findet. Wenn man nun diese durch die Zahl aller Seiten vervielfältiget, so erhält man den Umfang des umschriebenen Vieleckes, der zwar etwas größer, als der Kreisumfang, aber desto weniger davon unterschieden ist, je mehrere Seiten das Vieleck hat.

## §. 147.

Da der Umfang des Kreises dergestalt zwischen den Umfang des eingeschriebenen und des umschriebenen Vieleckes fallen muß, so haben die Alten in Ermangelung leichterer Hülfsmittel auf diese Weise denselben, und hiermit überhaupt das Verhältniß des Halbmessers oder Durchmessers zum Umfange gesucht.

Das letztere setzte Archimedes = 7 : 22, Adrian Metius = 113 : 355. Das gewöhnlichste ist = 100 : 314, welches die 3 ersten Ziffern des vom Ludolph von Cöln sehr mühsam berechneten, und von andern bis auf 127 Ziffern erweiterten Verhältnisses derselben sind. Doch treffen alle diese Verhältnisse nicht völlig zu.

## §. 148.

Wenn man die Sehne von 90° in 5 gleiche Theile theilt, und zu drei Durchmessern ein solches

Fünftheil setzt: so erhält man eine Linie, welche noch nicht um $\frac{1}{5000}$ kleiner ist, als der Umfang des Kreises.

§. 149.

Will man aber aus dem Halbmesser oder Durchmesser den Umfang, oder aus diesem jene berechnen, so kann dieses durch die Regeldetri vermöge der obigen Verhältnisse leicht geschehen. Nämlich

1) zu Findung des Umfanges hat man die folgenden Sätze:

100 : 314 = gegebener Durchmesser.

2) Zu Findung des Durchmessers aber:

314 : 100 = gegebener Umfang.

§. 150.

Aus dem gegebenen Durchmesser oder Umfange eines Kreises den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

Aufl. Man suche das unter beiden fehlende (§. 149.), vervielfältige den Umfang mit der Hälfte des Durchmessers, und theile das Vielfache mit 2. (§. 118. N. 2. und §. 140.)

§. 151.

Aus dem gegebenen Durchmesser und dem Bogen eines Ausschnittes, seinen Flächeninhalt zu berechnen.

Aufl. 1) Wenn der Bogen nach Längenmaasse gegeben ist, so vervielfältige man ihn mit dem Halbmesser, und theile das Vielfache mit 2. (§. 118. N. 1. und §. 140.)

2) Ist aber der Winkel des Ausschnittes und also der Bogen nach Graden des Kreises

gege-

gegeben: so suche man den Umfang (§. 149. N. 1.); aus diesem aber die Länge des Bogens, wozu man die folgenden Sätze einer Regeldetri hat:

360° : gegebene Grade = Länge des Umfanges.

Da man hierdurch die Länge des Bogens findet, so läßt sich das übrige nach N. 1. leisten.

## §. 152.

Aus der Länge einer Sehne Fig. 82. AB und der Höhe ihres Bogens, das ist: der von ihrer Mitte C senkrecht bis an den Bogen gehenden geraden Linie CD, den Durchmesser des Kreises zu finden.

Aufl. Man nehme von der Sehne AB die Hälfte, vervielfältige diese mit sich selbst, theile das herauskommende mit der Höhe des Bogens DC, und zähle eben dieses DC zu dem herauskommenden Antheile.

Wenn man DA und AE zieht, so sieht man leicht, daß DAE ein rechter Winkel (§. 64. N. 2.), CE aber die 3te stete Proportionallinie zu DC und CA (§. 84.), oder die 4te zu DC, CA und CA ist, und durch die Regeldetri DC : CA = CA gefunden wird. (§. 101.) Zu dieser aber muß DC kommen, um den Durchmesser zu ergänzen.

# Hauptinhalt des dritten Theiles der Geometrie.

## Von den Körpern.

§. 153.

Dieser Theil der Geometrie (die Stereometrie) betrachtet die Körper theils nach ihrem körperlichen Inhalte, theils nach denen Flächen, worin sie eingeschlossen sind.

## I. Von der Lage der Linien und Ebenen gegen einander überhaupt.

§. 154.

Aus dem Begriffe einer Ebene folgt:

1) daß durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, die Lage derselben völlig bestimmt wird.

2) Wenn sich zwo Ebenen Fig. 83. (A und B) einander durchschneiden, so ist ihr Durchschnitt (CD) eine gerade Linie.

§. 155.

Durch den Winkel zwoer Ebenen versteht man den Winkel, den die geraden Linien Fig. 83. o p und o q mit einander machen, die aus einem

Punkte

Punkte o ihres Durchschnittes in beiden Ebenen senkrecht auf denselben gezogen werden.

§. 156.

Wenn zwo Ebenen so gegen einander liegen, daß sie sich auf keiner Seite einander nähern, so nennet man sie **parallele Ebenen.**

§. 157.

Wenn zwo parallele Ebenen Fig. 84. A und B von einer dritten Ebene C durchschnitten werden: so sind die Durchschnitte D E und F G parallel.

Denn gesetzt diese D E und F G näherten sich auf einer Seite, und könnten sich durchschneiden (§. 10. N. 4), so müßten es auch die Ebenen A und B, in denen sie liegen, thun, welches die Voraussetzung aufheben würde.

§. 158.

Wenn zwo einander durchschneidende Ebenen Fig. 85. (A und B) von zwoen andern (c d e, f g h) so durchschnitten werden, daß die Durchschnitte (d e mit g h und d c mit g f) parallel sind, so sind auch die Ebenen (c d e und f g h) selbst parallel.

Gesetzt, daß nicht c d e sondern eine andere Ebene c d k durch den Punkt d mit f g h parallel wäre, so müßte auch d k mit g h parallel sein (§. 157.), welches der Voraussetzung nach unmöglich ist. (§. 21. N. 1.) Daher kann keine andere Ebene als c d e mit f g h in dieser Weite parallel sein.

## §. 159.

Wenn zwo einander durchschneidende Ebenen Fig. 86. (A und B) von zwoen andern Parallelen (c d e und f g h) durchschnitten werden: so machen die Durchschnitte in diesen gleiche Winkel (c d e = f g h).

Man gedenke sich noch eine Ebene p l m, die durch einen beliebigen Punkt p des Durchschnittes von A und B und zween ebenfalls beliebige Punkte (l und m) der Durchschnitte f g und g h geht, und hiemit die andern 4 Ebenen in den Linien p l, p m, n o und l m durchschneidet, so ist n d mit l g, d o mit g m, und n o mit l m parallel, und daher (in den Dreiecken p d n, p g l) p d : p g = n d : l g. In den Dreiecken p d o, p g m aber p d : p g = d o : g m. Daher n d : l g = d o : g m. (§. 77. N. 3.) In den letztgenannten Dreiecken ist auch p o : p m = d o : g m. In p o n, p m l aber p o : p m = o n : m l, daher d o : g m = o n : m l. Die Dreiecke n d o und l g m sind also einander ähnlich (§. 82. N. 3.), und die Winkel c d e und f g h gleich.

## §. 160.

Wenn eine gerade Linie Fig. 87. (h c) auf einer Ebene (P Q) so steht, daß sie mit zwoen in derselben befindlichen geraden Linien (a b und d e) rechte Winkel macht: so macht sie auch mit jeder andern (durch c) in dieser Ebene gezogenen Linie (f g) rechte Winkel.

Man mache c a = c b und c d = c e, und verbinde a e, b d, a h, d h, g h, b h, e h, f h. Alsdenn erhellet das übrige aus der Gleichheit der folgenden

Dreiecke und ihrer gleichgelegenen Seiten und Winkel.

| | | |
|---|---|---|
| a c e, d c b | §. 30. N. 2. - | - a e, d b und c a f, c b g |
| a c f, b c g | - - N. 1. - | - c f, c g a f, b g |
| a c h, b c h | - - N. 2. - | - a h, b h |
| d c h, e c h | - - N. 2. - | - d h, e h |
| a h e, b h d | - - N. 3. - | - h a f, h b g |
| h a f, h b g | - - N. 2. - | - h f, h g |
| h c f, h c g | - - N. 3. - | - h c f, h c g |

Also macht h c mit g f rechte Winkel. (§. 14.)

## §. 161.

Eine gerade Linie und eine Ebene werden einander senkrecht genannt, wenn die Linie mit allen denen, die sie in der Ebene durchschneiden, rechte Winkel macht.

## §. 162.

Wenn ein Körper Fig. 88. zwischen zwoen parallelen Ebenen so steht, daß er beide berührt, so kann man den senkrechten Abstand dieser Ebenen für die Länge des Körpers nehmen. Die Breite und Dicke aber in einem gewissen Punkte (D) der Länge werden durch die Größe der Figur (F) bestimmt, welche entsteht, wenn man daselbst den Körper durch eine auf die Länge senkrechte Ebene durchschneidet.

## §. 163.

Man erkennt hieraus leicht

1) daß zween Körper Fig. 88. (A und B) gleich lang sind, wenn ihre Längen durch zwo Parallele Ebenen (H I und KL) begränzt werden.

2) Daß, wenn dieselben dabei in jeden Punkte (D) ihrer Länge gleich große darauf senkrechte

ebene Durchschnitte verstatten, sie selbst von gleichem körperlichen Inhalte seyn müssen.

## II. Von den Pfeilerförmigen (Prismatischen) Körpern.

§. 164.

Der Pfeiler (das Prisma) ist ein Körper, welcher eines Theils in zwo einander gleiche, ähnliche und parallele Figuren Fig. 89. N. 1 (A B C und D E F), andern theils in Parallelogramme (A E, B F, C D) eingeschlossen ist, welche die gleichgelegenen Seiten jener Figuren verbinden.

Eben diese Figuren heißen die **Grundflächen** des Pfeilers, und er selbst wird nach deren Gestalt drei= vier= oder mehreckig genannt.

Jede gerade Linie, welche senkrecht von einer Grundfläche zur andern geht, macht seine Höhe aus.

§. 165.

Wenn die Grundflächen eines Pfeilers Rechtecke sind N. 2.: so wird er ein **Rechtwinklicher Pfeiler** (ein Parallelepipedum) genannt. Sind so wohl diese, als die vorgedachten Parallelogramme lauter Quadrate, so heißt er ein **Würfel** (Cubus) N. 3., jede Seite eines solchen Quadrates wird seine Seite, und er der **Würfel dieser Linie** genannt.

§. 166.

Wenn die Grundflächen Kreise, d. i. reguläre Vielecke von unendlich vielen Seiten, sind (§. 119.) N. 4.:

N. 4.: so verlieren sich mehrgedachte Parallelogramme in eine einzige in sich lauffende Fläche. Ein Pfeiler, der in zween Kreise und eine solche sie verbindende Fläche eingeschlossen ist, wird eine Walze (ein Cylinder, eine Säule), die gerade Linie aber, welche die Mittelpunkte seiner Grundflächen verbindet, die Axe derselben genannt.

## §. 167.

Wenn man einen Pfeiler Fig. 90. (A), von welcher Gestalt derselbe sein mag, mit den Grundflächen parallel durchschneidet: so ist die Figur des Durchschnittes (e) den Grundflächen gleich und ähnlich.

Die Winkel des Durchschnittes sind den Winkeln der Grundflächen gleich (§. 159.); die Seiten parallel (§. 157.), folglich ebenfalls gleich. (§. 37.) Also die Figuren gleich und ähnlich. (§. 26. N. 2.)

## §. 168.

Da zween Pfeiler Fig. 90. (A und B), welche gleich große Grundflächen (c und d) haben, auch überall gleich große mit ihnen parallele, das ist auf die Höhen senkrechte Durchschnitte (e und f) geben; die Höhe (p q) aber für die Länge angenommen werden kann: so müssen überhaupt die Pfeiler, welche gleich große Grundflächen und eine Höhe haben, von gleichem körperlichen Inhalt sein. (§. 163.)

## §. 169.

1) Die Pfeiler Fig. 91. N. 1. (A und B), welche eine Höhe (R S) haben, verhalten sich unter einander, wie ihre Grundflächen (cfg und kop).

2) Die, deren Grundflächen N. 2. (c und d) gleich sind, wie die Höhen (S R, S T).

3) Alle aber, wenn man die Verhältnisse der Grundflächen und der Höhen durch Zahlen ausdrückt, verhalten sich unter einander, wie die Vielfache der Grundfläche eines jeden mit seiner Höhe.

1) A und B sein zween dreieckige Pfeiler. Man setze, daß cfg dergestalt in gleiche Theile getheilt würde, daß eine gewisse Zahl derselben auf k o p fiele, und daß beide Pfeiler den Eintheilungslinien gemäß, nach den Ebenen d g h, e g h, l p q, m p q, n p q durchschnitten würden; so sieht man leicht, daß die Theile der untern Grundflächen mit den Theilen der obern gleiche Winkel (§. 159.) und eine gleiche Seite haben; daher auch ihre übrigen Seiten gleich (§. 30. N. 1.), und parallel (§. 157.), die Seitenflächen Parallelogramme (§. 39. N. 2.), folglich die Stücke c d h, d e h u. s. f. k l q, l m q u. s f. Pfeiler sind, welche (Vstzg) gleich große Grundflächen, und eine Höhe (R S) haben, und gleich groß sind. (§. 168.) Daher sich die Pfeiler A und B wie die Zahlen dieser ihrer Theile, das ist der Theile der Grundflächen, und wie die Grundflächen selbst verhalten. (§. 8. N. 8.)

Da anders gestalte Pfeiler dreieckigen von eben der Grundfläche und Höhe gleich sind, so müssen sie sich alle, wenn sie gleiche Höhen haben, wie ihre Grundflächen verhalten.

2) Man theile R S in gleiche Theile, so daß S T deren eine gewisse Zahl erhalte, und durchschneide beide Pfeiler nach den Theilungspunkten der Höhe mit den Grundflächen parallel, so sind die Durchschnitte denselben ganz gleich (§. 167.) ihre Seiten parallel, die Seitenflächen der abgeschnittenen Stücke Parallelogramme, und diese Pfeiler von gleichen Grundflächen und Höhen, und einander gleich. Also verhalten sich die Pfeiler A und B, wie die Zahlen dieser letzteren, d. i. wie die Zahlen der Theile ihrer Höhen, und wie die Höhen selbst.

3) Man

3) Man zerschneide die Pfeiler A und B auf beide Arten (N. 1. und 2.): so bestimmen die ersteren Durchschnitte die Schichten kleiner Pfeiler, die andern aber die Zahl deren, die in jeder Schichte enthalten sind. Diese kleinen Pfeiler sind gleich groß, und die Pfeiler A und B verhalten sich wie ihre Zahlen. Um aber diese zu erhalten, muß man die Zahl der Grundfläche mit der Zahl der Höhe vervielfältigen.

§. 170.

Da die Grundflächen der Würfel Quadrate sind, und sich wie die Quadratzahlen ihrer Seiten verhalten (§. 111.): so verhalten sich die Würfel unter einander, wie die Cubikzahlen ihrer Seiten.

## III. Von den Spitzsäulen.

§. 171.

Die Spitzsäule (Pyramide) ist ein Körper, der theils in eine Ebene Figur 92. N. 1. (ABC) von welcher Gestalt sie sein mag, und welche man die Grundfläche derselben nennet, theils in Dreiecke (DAB, DBC, DCA) eingeschlossen ist, welche die Seiten der Grundfläche mit einem außer ihr gelegenen Punkte (D), der die Spitze der Spitzsäule heißt, verbinden. Die Gestalt der Grundfläche giebt ihr den Namen einer drei-, vier- oder mehreckigen Spitzsäule. Ihre Höhe ist der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche.

§. 172.

Wenn die Grundfläche ein Kreis Fig. 92. N. 2., d. i. ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten ist, so verlieren sich jene Dreiecke in eine in sich lauffende Fläche. Dergleichen runde

Spitz-

Spitzsäulen nennet man einen Kegel; die gerade Linie, welche von der Spitze zum Mittelpunkte der Grundfläche geht, heißt die Axe desselben, und er wird ein gerader Kegel genannt, wenn seine Axe die Grundfläche senkrecht trift.

## §. 173.

Wenn man eine Spitzsäule Fig. 93. (a b c d) mit der Grundfläche parallel durchschneidet: so ist der Durchschnitt (e f g) der Grundfläche (b c d) ähnlich, und verhält sich zu ihr, wie das Quadrat der Höhe (a h) der abgeschnittenen Spitzsäule (a e f g) zu dem Quadrat der Höhe (a k) der ganzen (a b c d).

Wenn man in dem Beweise des 159sten §. anstatt p die Spitze a, und anstatt l, m die Winkel der Grundfläche setzt, welche an den, wovon die Rede ist, gränzen: so erkennt man leicht, daß die Winkel des Durchschnittes f g den Winkeln der Grundfläche gleich, und ihre gleichgelegene Seiten proportional, hiemit sie selbst einander ähnlich sind, und sich untereinander verhalten = Qt. e f : Qt. b c. (§. 123.)

Man durchschneide die Spitzsäule durch die Ebene a b k, so sind e h und b k parallel (§. 157.); folglich (§. 81.) a h : a k = a e : a b = e f : b c (§. 159.). Daher ist (§. 121.) Qt. a h : Qt. a k = Qt. e f : Qt. b c = der Durchschnitt zur Grundfläche.

## §. 174.

1) Wenn zwo Spitzsäulen Fig. 93. (a b c d und l o p), welche eine Höhe (q s) und gleiche Grundflächen (b c d und o p) haben, in einer Höhe (s r) mit diesen parallel durchschnitten werden: so müssen die Durchschnitte (e f g und m n) einander gleich sein, weil sie zu den gleichen Grundflächen

flächen einerlei Verhältniß (= Qt. q r : Qt. q s) haben. (§. 77. N. 4.)

2) Da man die Höhe für die Länge annehmen kann (§. 162.): so müssen die Spitzsäulen, deren Grundflächen und Höhen gleich sind, auch gleichen körperlichen Inhalt haben. (§. 163.).

## §. 175.

Die Spitzsäule hat jederzeit den dritten Theil von dem Inhalt eines Pfeilers, welcher mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Fig. 94. N. 1. a b c e sei ein dreieckiger Pfeiler. Diesen durchschneide man nach der Ebene b d f, so entsteht die Spitzsäule N. 2. b d e f, welche die Grundfläche und Höhe des Pfeilers selbst hat. Das übrige Stück N. 3. a b c f d durchschneide man nach der Ebene b c d, so entsteht noch eine dergleichen Spitzsäule N. 4. a b c d, welche der ersteren an Inhalt gleich ist (§. 174. N. 2.), und bleibt N. 5. b c f d übrig. Man nehme (N. 4. und 5.) a d c und c d f für die Grundflächen, so sind beide Stücke Spitzsäulen, deren Spitzen in b zusammenfallen, welches Punktes Abstand von den Grundflächen ihre gleiche Höhen ausmacht, wie ihre Grundflächen ebenfalls (§. 30. N. 3.), hiermit sie selbst, gleich sind.

Alle drei sind also gleich, und eine jede von ihnen z. B. b d e f, welche mit dem Pfeiler gleiche Grundfläche und Höhe hat, ist der dritte Theil desselben. Da nun vieleckige oder runde Spitzsäulen und Pfeiler dreieckigen Körpern ihrer Art, die mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben, gleich sind, (§§. 168. und 174.): so ist auch jede Spitzsäule der dritte Theil eines Pfeilers von gleicher Grundfläche und Höhe.

## §. 176.

Daher müssen sich auch die Spitzsäulen

1. wenn ihre Höhen gleich sind, wie die Grundflächen,

2. wenn ihre Grundflächen gleich sind, wie die Höhen,

3. alle aber, wie die Vielfache der Grundfläche einer jeden mit ihrer Höhe verhalten. (§. 77. N. 1.)

## IV. Von der Kugel.

### §. 177.

Die **Kugel** ist ein Körper, der in eine Fläche eingeschlossen ist, die überall gleich weit von einem Punkte absteht. Dieser heißt der **Mittelpunkt** der Kugel, die gerade Linie von ihm zur Kugelfläche der **Halbmesser**, der jenseits des Mittelpunkts bis wieder zur Kugelfläche verlängerte Halbmesser der **Durchmesser**. Endlich jeder Kreis, dessen Halbmesser oder Durchmesser zugleich der Kugel ihrer ist, wird ein **größter Kreis** genannt.

### §. 178.

1) Wenn man die Kugel um einen ihrer Durchmesser herumwendet, so kommt zwar jeder Theil ihrer Fläche nach und nach in die Stelle eines andern, in der Lage der ganzen Fläche aber wird nichts verändert.

2) Jeder ebene Durchschnitt der Kugel ist ein **Kreis**.

### §. 179.

1) Jeder ebene Durchschnitt Fig. 95. N. 1. (ADBE), der den Mittelpunkt (C) der Kugel in sich

sich begreift, ist ein größter Kreis, und theilet die Kugel in zween gleiche Theile.

2) Jeder größte Kreis N. 2. hat den Mittelpunkt der Kugel zu dem seinigen.

3) Zween größte Kreise N. 3. durchschneiden sich jederzeit in zween gleiche Theile.

1) Der Halbmesser C B und Durchmesser A B gehören so wohl dem Durchschnitte als der Kugel, also ist jener ein größter Kreis; und wenn man die Kugel um den Durchmesser A B herumdrehet, bis A D B in A E B liegt, so haben die Theile über und unter der Ebene A E B D ihre Stellen ohne weitere Veränderung mit einander verwechselt. Sie können also einander decken und sind gleich.

2) F G H N. 2. sei ein größter Kreis, dessen Mittelpunkt I aber außer den Mittelpunkt der Kugel K falle. Man ziehe den Durchmesser des Kreises F G, die Halbmesser der Kugel K F, K G, und verbinde K I; so fällt diese senkrecht auf F G (§. 30. N. 3.). Daher F K in dem rechtwinklichen Dreieck F I K die Hypothenuse, F I aber eine Kathete, folglich kleiner als der Halbmesser der Kugel ist (§. 34.). F G H kann also kein größter Kreis sein.

3) Durch einen von den Durchschnitten N. 3. A der größten Kreise E A D und F A G und den Mittelpunkt der Kugel ziehe man den Durchmesser derselben A B; so ist eben derselbe (N. 2.) eines jeden dieser Kreise Durchmesser, und muß ihren andern Durchschnitt B treffen (§. 10. N. 1.). Sie theilen sich also in zween gleiche Theile. (§. 57. N. 1.)

## §. 180.

Der Inhalt der Kugel Fig. 96. macht $\frac{2}{3}$ von dem Inhalt einer Walze, deren Grundfläche ein größter Kreis und deren Höhe ihr Durchmesser ist.

Man stelle eine halbe Kugel nebst einem Kegel und einer Walze, deren Grundflächen größte Kreise, und deren

deren Axen oder Höhen H E und O K Halbmesser derselben sind auf eine Ebene, und zwar den Kegel umgekehrt, so daß seine Grundfläche mit der Grundebene und den Grundflächen der andern Körper parallel liegt. In der Kugel ziehe man den senkrechten Halbmesser C P.

Alsdenn setze man daß alle drei Körper in einer Höhe C A = E F = K M mit der Grundebene parallel durchschnitten würden, so werden die Durchschnitte Kreise, und A B, F G und M N deren Halbmesser sein. Wenn man den Kegel durch die Ebene H I E durchschneidet, so ist H I mit F G parallel (§. 157.); folglich H I : H E = F G : F E (§. 80.). Daher F G = F E = A C. Man ziehe den Halbmesser der Kugel C B, welcher = C D = M N ist.

Also ist A B der Halbmesser des Durchschnittes der Kugel, A C des Kegels, und C B der Walze. Da nun das Dreieck A B C rechtwinklich ist: so ist der Durchschnitt der Walze den Durchschnitten der Kugel und des Kegels zusammen genommen gleich. (§. 125.)

Da dieses in allen Punkten der Höhe gilt, und die Höhen der drei Körper gleich sind (Vstzg): so muß die Walze so viel körperlichen Inhalt, als die beiden andern zusammen, haben (§. 162. 163.); und weil der Kegel $\frac{1}{3}$ der Walze enthält (§. 175.), so muß die halbe Kugel $\frac{2}{3}$ derselben ausmachen. Ja da endlich eben dieses von der andern Hälfte der Kugel und der Walze gilt, so ist die Kugel $\frac{2}{3}$ einer Walze, deren Grundfläche ein größter Kreis, und deren Höhe der Durchmesser ist.

## §. 181.

Die Kugeln verhalten sich ihrem körperlichen Inhalt nach unter einander wie die Würfel ihrer Durchmesser.

Die Kugel verhält sich zu der im vorigen § beschriebenen Walze wie 2 : 3, diese aber zu dem Würfel des Durchmessers, wie ihre Grundflächen (§. 169. N. 1.), d. i. wie der Kreis zum Quadrat des Durchmessers.

Da

Da beide Verhältnisse beständig sind (§. 124.): so kann man, wenn K und k zwo Kugeln, W und w aber die Würfel ihrer Durchmesser in eben der Ordnung sind, setzen: K : W = k : w, oder K : k = W : w. (§. 77. N. 2.)

## §. 182.

Wenn die Grundfläche Fig. 97. (abc) einer Spitzsäule (abcd) so groß ist als die Grundflächen (hik, mno, qsr) mehrerer andern eben so hohen zusammen: so ist auch die Spitzsäule (abcd) den andern zusammen an körperlichem Inhalte gleich.

Man setze, welches jederzeit möglich ist, daß aeb, efb, fcb, den Grundflächen hki, mon, srq gleich gemacht, und abcd nach den Ebenen ebd, fbd durchschnitten würde, so ist aebd = hikg, ebfd = mnol, fbcd = sqrp; folglich die erstere den andern zusammen gleich. (§. 174. N. 2.)

## §. 183.

Die Kugel ist einem Kegel gleich Fig. 98., dessen Grundfläche die Kugelfläche, und dessen Höhe der Halbmesser ist.

Ein sehr kleines Stück der Kugelfläche ist von einer Ebene nicht merklich verschieden, und man kann gerade Linien darauf ziehen. Man theile demnach die Kugelfläche in unendlich viele unendlich kleine geradelinige Vielecke als abd, bde, def u. s. f., von welcher Gestalt sie auch sein mögen, und setze durch jede zwo gränzende Ecken und den Mittelpunkt der Kugel c eine Ebene, z. B. adc, bdc, abc u. s. f.: so wird die Kugel in eine unendliche Menge Spitzsäulen getheilt, deren Grundflächen zusammen die Kugelfläche ausmachen, und deren Höhen von dem Halbmesser unendlich wenig, d. i. gar nicht, unterschieden sind. Alle diese Spitzsäulen aber sind in einer, also auch in einem Kegel

enthalten (§. 174. N. 2.), dessen Grundfläche die Kugelfläche, und dessen Höhe der Halbmesser ist.

§. 184.

Die Kugelfläche ist vier mahl so groß als der größte Kreis der Kugel.

Der Kegel (Fig. 96.) in dem Beweise des 180sten § ist $\frac{1}{3}$, und die halbe Kugel $\frac{2}{3}$ der Walze; folglich der erstere halb so groß, als die halbe Kugel. Ein anderer Kegel, dessen Grundfläche bei eben der Höhe 2 größte Kreise begriffe, würde also der halben, und einer, dessen Grundfläche ihrer 4 enthielte, der ganzen Kugel gleich sein (§. 176. N. 1.). Da nun des Kegels, welcher der Kugel gleich ist, und ihren Halbmesser zur Höhe hat, Grundfläche die Kugelfläche ist (§. 183.): so muß diese 4 größte Kreise enthalten.

§. 185.

Die Flächen der Kugeln verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Denn sie verhalten sich, wie ihre Viertheile, die größten Kreise, und daher wie die gedachten Quadrate. (§. 124.)

## V. Vom Körperlichen Maasse und der Berechnung der Körper.

§. 186.

So willkührlich es an sich ist, welchen Körper man zum Maasse eines andern annehmen will: so bequem ist es, sich dazu eines Würfels zu bedienen, dessen Seite eines von den gewöhnlichen Längenmaassen, z. B. 1°, 1′ u. s. f. 1 Meile oder dergleichen ist. Von welcher Seite der Würfel den Namen einer Cubikruthe, eines Cubikfusses,

einer

einer Cubikmeile oder dergl. erhält. Wir wollen das Körperliche Maaß mit Beisetzung eines c unterscheiden, so daß z. B. 57′ c. sieben und funfzig Cubikfuß andeuten.

§. 187.

Wenn 1° = 10′, 1′ = 10″ u. s. f. angenommen wird: so hält 1° c. 1000′ c., 1′ c. aber 1000″ c. u. s. f. in sich. (§. 170.) Daher man auch hier der Bringung auf andere Benennungen überhoben ist; indem man bei einer Zahl von geringerer Benennung nur 3 Ziffern für eine jede derselben zu rechnen, und bei einer Zahl von mehreren Benennungen, die man auf die geringste bringen will, einer jeden eben so viele Ziffern zu geben, und die fehlenden mit Nullen zu ersetzen hat. Z. B. 32049632″ c. sind = 32° 49′ 632″ c. und hingegen 12° 5′ 80″ c. sind = 12005080″ c.

## Aufgaben.

§. 188.

Einen jeden pfeilerförmigen Körper zu berechnen.

Aufl. Man berechne seine Grundfläche (§. 138. 142. und §. 150. folg.), und messe nach dem dabei gebrauchten Längenmaasse, und eben der Benennung desselben seine Höhe. Wenn man diese beide Zahlen zusammen vervielfältiget, so wird das Vielfache anzeigen, wie viel solcher Würfel, deren Seite man zum Maasse genommen, in dem Pfeiler enthalten sein. Wenn z. B. die Grundfläche 72′ q. und die Höhe 15′ wäre, so ist der Inhalt = 1080′ c. = 1° 80′ c.

§. 189.

Einen Würfel zu berechnen, mißt man demnach eine Seite, vervielfältiget sie mit sich selbst, und ihr Quadrat nochmahls mit ihr.

§. 190.

Eine jede Spitzsäule zu berechnen.

Aufl. Man verfährt völlig wie §. 188., theilt aber das gefundene mit 3. (§. 175.)

§. 191.

Die Fläche einer Kugel zu berechnen.

Aufl. Man messe ihren Durchmesser, suche den Umfang des größten Kreises (§. 149.) und vervielfältige beides mit einander. (§. 184.)

§. 192.

Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.

Aufl. Man suche ihre Fläche, vervielfältige sie mit dem Halbmesser, und theile das Vielfache mit 3. (§ §. 183. 190.)

§. 193.

Die Berechnung solcher Körper, welche aus dem beschriebenen zusammengesetzt sind, erfordert keine besondere Regeln. Solche Körper, die in andere als die beschriebenen Flächen eingeschlossen sind, setzen eine Kenntniß der höhern Geometrie voraus. Die Findung ihres Inhaltes durch Abwägen, Einsenkung in Wasser oder Sand und dergleichen gehören nicht hieher.

Ende der Geometrie.

---

# Anfangsgründe
der
# gemeinen Trigonometrie.

# Einleitung.

## §. 1.

Die Geometrie lehret durch solche Stücke, wodurch ein geradeliniges Dreieck völlig bestimmt wird, (§. 30.) dasselbe auf einer Ebene beschreiben. Die Trigonometrie aber lehret die übrigen Stücke berechnen, indem sie gewisse Verhältnisse zwischen den Seiten und Winkeln der Dreiecke findet. Wir nennen sie die Gemeine im Gegensatz der Sphärischen, welche solche Dreiecke betrachtet, die auf einer Kugelfläche durch drei Bogen größter Kreise begränzt werden.

# I. Abtheilung, welche die Lehrsätze enthält.

## §. 2.

Die gerade Linie Fig. 1. (D E), die von dem Ende (D) eines Halbmessers (CD) auf einen andern (A C) senkrecht gezogen wird, nennet man den Sinus so wohl derer beiden Bogen (A D und DB), als derer Winkel (A C D und DCB) welche der Halbmesser CD mit dem andern A C und dessen Verlängerung C B einschließt.

§. 3.

Die gerade Linie Fig. 2. (A T) aber, welche von dem Ende (A) eines Halbmessers senkrecht aufgerichtet wird, und bis an den fortgezogenen Halbmesser (C D) reicht, heißt die Tangente eben dieser Bogen und Winkel.

§. 4.

Durch das Complement eines Bogens oder Winkels versteht man seinen Unterschied von 90°, d. i. dasjenige, was ihm entweder zu 90° mangelt, oder um welches er sie übertrifft. Der Cosinus eines Bogens oder Winkels ist der Sinus seines Complements, die Cotangente dessen Tangente. Wenn CF auf CA senkrecht steht: so ist Fig. 1. DG der Cosinus, Fig. 2. F V aber die Cotangente der vorgenannten Bogen und Winkel.

§. 5.

1) Zu dem Halbmesser Fig. 3. C a ist d e der Sinus und t a die Tangente der Winkel um C; zu dem Halbmesser C A aber sind es D E und T A. Man sieht aber leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke C e d und C E D, imgleichen C a t und C A T. (G. §. 80.), daß d e : d C = D E : D C und t a : a C = T A : A C, und daher überhaupt, so lange die Größe des Winkels bleibt, so wohl die Sinus als die Tangenten doch immer einerlei Verhältniß gegen ihre Halbmesser behalten müssen, und man von jener auf dieses, wie von diesem auf jene schliessen kann. Der letztere Schluß erfordert gleichwol die Einschränkung.

2)

2) Daß eben derselbe Sinus und Cosinus, eben die Tangente und Cotangente jederzeit zugleich einem spitzigen und einem stumpfen Winkel zugehören, welche mit einander 180° ausmachen. (G. §. 18.)

3) In einem rechtwinklichen Dreieck muß der Sinus des einen spitzigen Winkels jederzeit der Cosinus des andern, und des einen Tangente des andern Cotangente sein. (G. §. 29. N. 1.).

§. 6.

1) Der Sinus des rechten Winkels ist dem Halbmesser gleich und der größte von allen. Da diese also Theile desselben sind, so pflegt man jenen den Sinus totus zu nennen.

2) Die Tangente eines rechten Winkels kann nie mit dem verlängerten Halbmesser zusammenkommen (G. §. 22.). Sie ist also unendlich.

§. 7.

In einem rechtwinklichen Dreieck Fig. 4. (A B C) verhält sich

1) die Hypothenuse (C B) zu einer von den Katheten (A C) wie der Sinus totus zu dem Cosinus des dazwischen liegenden spitzigen Winkels (C).

2) Eine Kathete (A B) zu der andern (A C) wie der Sinus totus zu der Tangente des an der ersten (A B) liegenden Winkels (B).

1) Man beschreibe mit dem Halbmesser B C einen Kreis, so ist dieser selbst der Sinus totus (§. 6. N. 1.) und C A der Sinus des Winkels B nach demselben (§. 2.), folglich der Cosinus des Winkels C. Daher BC : CA = S. tot. : S. B und B C : C A = S. tot. : Cos. C.

2) Man beschreibe mit B A einen Kreis, so ist dieser der Halbmesser oder Sin. tot., A C aber die Tangente des Winkels B. Also A B : A C = S. tot. Tang. B.

§. 8.

In einem jeden Dreieck Fig. 5. 1 und 2. (A B C) verhalten sich jede zwo Seiten (A C und C B) unter einander, wie die Sinus der ihnen gegegenüberliegenden Winkel (B und A) nach einem Halbmesser genommen.

Man beschreibe durch die drei Ecken A, B und C einen Kreis; so werden die Winkel Winkel am Umfange, deren jeder die Hälfte des Bogens, den er bespannt, zu seinem Maaße hat. (G. §. 64.).

Man ziehe die Halbmesser O C, O E, O D, beide letztere senkrecht durch die zu vergleichenden Seiten; so ist C D = D A das Maaß des Winkels B (G. §. 65. N. 2.); C E = E B des Winkels A seines. Folglich C O D = B und C O E = A. (G. §. 62.). Aber C G ist der Sinus des Winkels C O D folglich auch des Winkels B, und C F der Sinus der Winkel C O E (§. 2.) und A, nach eben dem Halbmesser O C. Ferner C G = $\frac{1}{2}$ C A, und C F = $\frac{1}{2}$ C B. (G. §. 65. N. 2.). Da nun C A : C B = $\frac{1}{2}$ C A : $\frac{1}{2}$ C B (G. §. 77. N. 1.) so ist auch C A : C B = S. B : S. A.

§. 9.

Wenn man von dem Ende Fig. 6. (C) einer von den beiden kleinesten Seiten N. 1. und N. 2. (A C) eines Dreieckes (A B C) auf die gegenüberstehende (allenfalls fortgezogene) Seite (A B) eine gerade Linie (C D) senkrecht zieht, wodurch zwischen dieser (C D) und den Ecken (A und B) die an dieselben gränzenden Abschnitte (D A und D B) entstehen: so ist jederzeit das Quadrat der dritten Seite (C B) dem Quadrat des angränzenden

den Abschnittes (D B) nebst dem Unterschiede der Quadrate der erstgenannten Seite (A C) und des an sie gränzenden Abschnittes (A D) gleich.

Denn das Qt. C B = Qt. D B + Qt. C D. Das Qt. C D aber ist = Qt. A C — Qt. A D. (G. §. 116.) Also ist Qt. C B = Qt. D B + Qt. A C — Qt. A D.

§. 10.

1) Wenn man aus der Spitze Fig. 7. (C) der kleinesten Seiten (A C und C B) eines Dreieckes (A B C) auf die gegenüberstehende größeste (A B) eine gerade Linie (C D) senkrecht herabläßt: so sind die Summe und der Unterschied der daher entstehenden Abschnitte dieser letzten der Summe und dem Unterschiede der beiden kleineren Seiten reciprok. A D + D B : A C + C B = A C — C B : A D — D B.

2) Und zwar liegt der größere Abschnitt an der größeren, und der kleinere an der kleineren dieser Seiten (A C und C B.).

1) Man beschreibe mit der kleinesten Seite C B als dem Halbmesser einen Kreis, und ziehe A C bis G fort. Alsdenn ist D E = D B. (G. §. 65. N. 2.); folglich A E = A D — D B = dem Unterschiede der Abschnitte, A B aber = A D + D B = ihrer Summe. Da C G = C B, so ist A G die Summe der kleineren Seiten, und da C F ebenfalls = C B, so ist A F der Unterschied derselben. Es ist aber A B : A G = A F : A E : (G §. 86. N. 2.)

2) Weil A C größer als C B ist (Vstzg.) so muß A außer den Kreis fallen, und A D = A E + D B grösser als D B sein.

## II. Abtheilung.

### Von würklicher Berechnung der Dreiecke.

§. 11.

Weil die Größe eines Winkels durch das Verhältniß seines Sinus oder seiner Tangente gegen den Halbmesser bestimmt wird (§. 5. N. 1.): so hat man für die gemeinen Tafeln angenommen, der Halbmesser habe 10 000 000 gleicher Theile, und ausgerechnet, wie viel solcher Theile dem Sinus und der Tangente eines Winkels von einer gewissen Anzahl Graden zukommen würden. Da der Sinus jederzeit die Hälfte von der Sehne des doppelten Bogens ist (G. §. 65. N. 2.): so haben sich die Sinus wie die Sehnen, oder Seiten der regulären Vielecke (G. §. 143. folg.) berechnen lassen, wiewohl noch einige Kunststücke dabei nöthig waren, deren Beschreibung für diese Anfangsgründe zu weitläuffig ist. Die Tangenten sind wie die Seiten umschriebener Vielecke (G. §. 146.) durch jene leicht gefunden worden. So sind die Sinus und Tangententafeln entstanden.

§. 12.

In den gemeinen Tafeln findet man diese Linien für alle Winkel von 1′ an bis 90°, von einer Minute zur andern, berechnet. Für die stumpfen Winkel findet man sie nicht besonders, weil man einen solchen nur von 180° abziehen, und den Sinus oder die Tangente des herauskommenden dafür nehmen darf (§. 5. N. 2.). Uebrigens sind die Winkel in den Tafeln so geordnet, daß man eines jeden Complement auf der angränzenden Spalte

oder

oder Seite findet, damit man den Cosinus und die Cotangente nicht erst besonders zu suchen brauche.

Von den in einigen Tafeln vorkommenden Secanten, deren wir uns nicht bedienen werden, merken wir nur an, daß man darunter den bis zur Tangente verlängerten Halbmesser versteht.

§. 13.

Da die Sinus und Tangenten als große Zahlen die Vervielfältigung und Theilung, hiermit auch die Ausführung der Regeldetri, sehr beschwerlich machen würden: so braucht man da, wo diese vorkommen, an ihrer Stelle lieber ihre Logarithmen, welche man künstliche Sinus und Tangenten nennet, und welche in den Tafeln entweder jenen beigefügt, oder besonders abgedruckt sind. Die Kennziffern derselben sind um 3 größer, als sie nach Beschaffenheit der Zahlen sein sollten (Rech. §. 175.), weil die Logarithmen eigentlich zu 1000 mahl größern Zahlen berechnet sind. Für die Seiten der Dreiecke braucht man die Logarithmen der in natürlicher Ordnung von 1 bis 10 000 folgenden Zahlen. S. davon Rechenk. §. 163. folg.

## Aufgaben.

§. 14.

Aus der Hypothenuse Fig. 8. (BC) und einer Kathete (AB) eines rechtwinklichen Dreiecks (ABC) den Winkel darzwischen (B) zu finden.

Aufl. Man suche zu CB, AB und dem Sin. totus die 4te Proportionalzahl, so findet man den Cosinus des Winkels B, wodurch er selbst bekannt wird.

Es sei z. B. CB = 834′, AB = 612′, so geschieht die Rechnung mit Hülfe der Logarithmen folgendermaassen:

Log. AB = 2.7867514 } zusammen-
Log. d. Sin. tot. = 10.0000000 } gezählt.
12.7867514
Log. CB = 2.9211660 abgez.
Log. d. Cos. B = 9.8655854
Daher B = 42° 48′ (S. §. 29. N. 1.)

## §. 15.

Man wird aus dieser Rechnung leicht merken, daß wenn irgendwo der Logarithme des Sin. tot. zu einem andern Logarithmen zu, oder davon abzuzählen ist, man nur die Kennziffer dieses letzten um 10 vergrößern oder verkleinern darf.

## §. 16.

Aus der Hypothenuse Fig. 8. (CB) und einem spitzigen Winkel (B) die daran liegende Kathete (AB) zu finden.

Aufl. Man suche zu dem Sin. totus dem Cosinus B und BC die 4te Proportionalzahl, welche AB ist.

Es sei BC = 724′, B = 43° 15′.
Log. Cos. B = 9.8623526 } zus. gezählt und
Log. BC = 2.8597386 } Log. Sin. tot. abgez.
Log. AB = 2.7220912
AB = 527′. Oder, wenn man die Kennziffer des Logarithmen in 3 verwandelt (Rechenk. §. 180.), AB = 5273″.

## §. 17.

Aus beiden Katheten Fig. 8. (AB und AC) den an der ersten (AB) liegenden spitzigen Winkel (B) zu finden.

Aufl.

Aufl. Man suche zu AB, AC und dem Sin. tot. die 4te Proportionalzahl, welche die Tangente des Winkels B ist, und ihn bekannt macht.

Es sei AB = 624′, AC = 430′. so ist:

Log. AC mit
Log. d. Sin. tot } = 12.6334685
Log. AB = 2.7951846

Log. der Tang. B = 9.8382839. Also
B = 34° 34′.

§. 18.

Aus einer Kathete Fig. 8. (AB) und dem daran liegenden spitzigen Winkel (B) die andere Kathete AC zu finden.

Aufl. Man suche zu Sin. tot. Tang. B und AB die 4te Proportionalzahl, welche AC ist.

Es sei AB = 624′, B = 34° 35′
Log. Tang. B = 9.8384867
Log. AB = 2.7951846

Log. AC = 2.6336713
AC = 430′.

§. 19.

Aus zweenen Winkeln Fig. 9. (A und B) eines jeden Dreieckes (ABC) und der Seite (BC), die dem einen von ihnen (A) gegenüber liegt, die dem andern (B) gegenüberliegende Seite (AC) zu finden.

Aufl. Man suche zu dem Sin. A, Sin. B und BC die 4te Proportionalzahl. Diese ist die Seite AC.

Es sei A = 41° 8′, B = 59° 45′, BC = 895′.
Log. Sin. B = 9.9364311
Log. BC = 2.9518230

12.8882541
Log. Sin. A = 9.8181028

Log. AC = 3.0701513.
Also ist AC = 1175′.

§. 22.

§. 20.

Durch zween gegebene Winkel eines Dreiecks wird zugleich der dritte bekannt. Denn man darf, um denselben zu erfahren, nur jene zusammenzählen, und ihre Summe von 180° abziehen (G. §. 28.).

Wenn demnach nebst einer Seite (BC) die beiden daran liegenden Winkel (B und C) zu Findung einer von den andern Seiten (AC) gegeben werden: so sucht man vorher den der ersteren (BC) gegenüberliegenden Winkel (A), und verfährt alsdenn, wie §. 18.

Z. B. Wenn BC wie vorhin = 895′, B = 59° 45′ und C = 79° 7′ wären, so ist B = 59° 45′
C = 79° 7′

ihre Summe = 138° 52′
abgezogen von 180°

A = 41° 8′

worauf denn wie vorhin verfahren wird.

§. 21

Aus zwoen Seiten Fig. 9. (AC und CB) nebst dem Winkel (B), der der einen von ihnen (AC) gegenüber liegt, den der andern (BC) gegenüber liegenden Winkel (A) zu finden.

Aufl. Man suche zu AC, BC und dem Sin. B die 4te Proportionalzahl, welche der Sin. von A ist.

Es sei AC = 716′, CB = 503′, B = 65° 6.

Log. CB = 2.7015680
Log. Sin. B = 9.9576284

12.6591964
Log. AC = 2.8549130

Log. Sin. A = 9.8042834
A = 39° 35′.

§. 22.

Wenn Fig. 9. C B kleiner als A C vorausgesetzt wird, so muß A kleiner als B (G. §. 34. N. 1.), folglich spitzig sein. Wäre aber Fig. 10. A C kleiner als C B, so bliebe man zweifelhaft, ob A spitzig oder stumpf sei, und ob die Seite A C in 1 oder 2 angebracht werden müsse, da an sich beides statt finden kann, und der Sinus dem einen Winkel so wohl als dem andern zugehört; es müßten denn andere Umstände solches entscheiden, als wenn man z. B. wüßte, welche von den Seiten C B oder A B die größte wäre.

§. 23.

Aus zwoen Seiten Fig. 6. N. 1 und 2. (A C A B) nebst dem Winkel darzwischen (A) die dritte Seite (B C) zu finden. (A C sei kleiner als A B.)

Aufl. Man gedenke sich eine gerade Linie von C senkrecht auf A B, welche je nachdem der Winkel A spitzig oder stumpf ist, innerhalb oder außerhalb A B fallen wird. Im letzteren Falle ziehe man den gegebenen Winkel von 180° ab, um seinen Nebenwinkel C A D zu finden.

In beiden Fällen suche man durch C A und C A D den an C A gränzenden Abschnitt A D, (§. 16.), welcher im 1sten Falle von A B abgezogen, im 2ten dazu gezählt, den an C B gränzenden Abschnitt D B, giebt. Hierauf vervielfältige man D B, A C und A D jede mit sich selbst, zähle die beiden ersteren Quadratzahlen zusammen, und die letzte von ihrer Summe ab. Endlich ziehe man aus dem Reste die Quadratwurzel (Rechenk. §. 129. folg.), welche = C B ist. (§. 9.)

Es sei

| 1 | 2 |
|---|---|
| A C = 316′, AB = 446′ | A C = 348′, A B = 400 |
| C A D oder A = 37°53′ | A = 142° 10′ |
| | von 180° |
| | CAD oder A = 37° 50′ |
| Log. Cos. A = 9.8972216 | Log. Cos. A = 9.8975162 |
| Log. A C = 2.4996871 | Log. A C = 2.5415792 |
| Log. A D = 2.3969087 | Log. A D = 2.4390954 |
| A D = 249′ oder | A D = 274′ |
| genauer wie §. 16. | oder genauer |
| A D = 2494″ von | A D = 2748″ zu |
| A B = 4460″ | A B = 4000 |
| D B = 1966″ | D B = 6748″ |
| Qt. DB = 3865156 zu | Qt. DB = 45535504 zu |
| Qt. AC = 9985600 | Qt. AC = 12110400 |
| 13850756. davon | 57645904 dav. |
| Qt. AD = 6220036 | Qt. A D = 7551504 |
| Qt. BC = 7630720 | Qt. B C = 50094400 |
| Qt. W. = 2762″ = BC | Qt. W. = 7077″ = BC |

## §. 24.

Aus allen Seiten eines Dreieckes Fig. 6. N. 1. seine Winkel zu finden.

Aufl. Aus der Ecke C der kleinesten Seiten A C und C B gedenke man sich eine gerade Linie C D senkrecht auf die grösseste Seite, welche dadurch in die Abschnitte A D und D B getheilet wird. Alsdenn suche man zu A B, A C + C B und A C — C B die 4te Proportionalzahl, den Unterschied dieser Abschnitte (§. 10.). Wenn man diesen Fig. 7. von A B abzieht, und den Rest B E mit 2 theilt: so erhält man den kleineren Abschnitt D B, und wenn man diesen zu dem Unterschiede zählt, den grösseren Abschnitt A D. Alsdenn findet man in dem Dreieck A D C durch A C und A D den Winkel A, und in dem Dreiecke C D B durch C B und

und B D den Winkel B (§. 14.), welche beide kleiner als C (G. §. 34.), folglich spitzig sind. Ihre Summe von 180° abgezogen, läßt den Winkel C übrig. (§. 20.)

Es sei A B = 628′, A C = 512′, B C = 386′
B C = 386′ A C = 512′

A B = 628, AC+BC = 898, AC-BC = 126.

Man findet hierdurch entweder durch die Regeldetri oder, wenn man will, mit Hülfe der Logarithmen

A E = 180′ von
A B = 628′

B E = 448′ halb
D B = 224′ zu
A E = 180′

A D = 404′
B = 54° 32′ ⎫ zusam.
A = 37° 55′ ⎭

92° 27′

Log. D B ⎫
+ Log. S. tot. ⎭ = 12.3502480
Log. B C = 2.5865873

Log. Cos. B = 9.7636607
B = 54° 32′

Log. A D + L. S. t. = 12.6063814
Log. A C = 2.7092700

Log. Cos. A = 9.8971114
A = 37° 55′

180°
92° 27′

C = 87° 33′

§. 25.

Man findet den durch die Rechnung herausgebrachten Logarithmen eines Sinus oder einer Tangente selten völlig in den Tafeln, und muß sich gemeiniglich damit begnügen, den nächst kleineren zu nehmen So wurde im vorigen §. der Winkel A durch den Log. 9.8971114 gefunden, man mußte aber an dessen Stelle diesen 9.8970249 nehmen, welcher eigentlich zu dem Sinus von 52° 5′ gehört. Nun sieht man zwar leicht, daß der herausgebrachte Logarithme zu einem Sinus von mehr als 52° 5′ gehören muß, daß aber der Unterschied blos Sekunden betragen kann, weil sonst der nächst größere Logarithme 9.8971233 herausgekommen sein würde. Um zu erforschen, wie viel dieses betrage verfährt man folgender Maaßen, zwar nicht mit völliger, aber doch zur Ausübung hinreichender Genauigkeit. Man zählt den nächst kleineren Logarithmen der Tafeln

so wohl von dem nächst größeren, als von dem herausgebrachten ab, und schließt hernach: wie der erste Unterschied zu dem zweiten, so verhalten sich 60″ zu der noch fehlenden Zahl Sekunden, welche man durch die Regeldetri erforscht. In dem angeführten Falle verfährt man demnach so:

$$\begin{array}{rcrcr} 9.8971233 & & 9.8971114 & & \\ 9.8970249 & & 9.8970249 & & \\ \hline 984 & - & 865 & - & 60 \\ & & 60 & & \\ \hline & 984) & 51900 & \vert\, 52'' & \\ & & 4920 & & \\ \hline & & 2700 & & \end{array}$$

Diese 52″ wären also zu 52° 5′ zuzurechnen; daher sie in unserm Falle von dem Complement abzurechnen sind, so daß der Winkel A eigentlich nur 37° 54′8″ hat.

§. 26.

Wäre ein vorgegebener Winkel außer den Minuten auch noch durch Sekunden bestimmt, da man denn seinen Sinus oder seine Tangente mithin auch deren Logarithmen nicht in den Tafeln finden würde: so sucht man diesen folgender Maaßen. Man zieht den zu den Minuten gehörigen Logarithmen von dem nächst größeren ab, und bemerkt den Unterschied. Hernach schließt man: wie 60″ zu der gegebenen Zahl Sekunden, so der Unterschied der Logarithmen zu dem, was dem kleineren zuzuzählen ist.

Man sucht z. B. den Log. d. Tang. v. 48° 17′ 25″. So ist Log d. T. 48° 17′ dieser: 10.0498838, sein Unterschied von dem nächst größern 2543. 60″—25″—2543

$$\begin{array}{rr} & 25 \\ \hline & 12715 \\ & 5086 \\ \hline 60) & 63575 \,\vert\, 1059 \\ & 10.0498838 \\ & 1059 \\ \hline \end{array}$$

D. Log. d. T. von 48°. 17′. 25″. ist 10.0499897.

Ende der Trigonometrie.

# Anhang

einiger

## Anwendungen

der Geometrie und Trigonometrie auf die Feldmeßkunst,

nebst

den allgemeinsten Begriffen

## vom Nivelliren.

# Erste Gründe
## der
# Feldmeßkunst.

§. 1.

Die Feldmeßkunst beschäftiget sich mit Messung der auf dem Felde oder sonst auf der Oberfläche der Erde vorkommenden Linien und Flächen, wie auch mit zweckmäßigen Eintheilungen derselben. Sie ist also als ein Theil der praktischen Geometrie zu betrachten, deren Begriff von einem weit größeren Umfange ist.

## Erster Theil.

## Von den Linien und Winkeln überhaupt.

### I. Von Messung solcher Linien, denen man beikommen kann.

§. 2.

Da sich gerade Linien auf dem Felde nicht wie auf dem Papiere beschreiben lassen, und es gleichwohl oft nöthig ist, daß dieselben auch in einiger Ferne kennbar gemacht werden: so pflegt man dieselben, daferne jenes nicht etwa auf andere Art, z. B. durch eine gerade Mauer oder dergleichen, erreicht wird, abzustecken.

§. 3.

Um eine gerade Linie abzustecken, bedient man sich der Meßstäbe oder Fahnen, welche man, wenn die Linie nicht zu lang ist, in den Anfang und das Ende, sonst aber in zween beliebige Punkte derselben senkrecht einsticht. Wenn man sich alsdenn außerhalb der Stäbe so hinstellt, daß der vordere Stab dem Auge den andern bedeckt, so weiß man, daß alles, was durch beide bedeckt wird, zu dieser Linie gehört, und kann leicht noch mehrere Stäbe in eben dieser geraden Linie entweder auswärts zu ihrer Verlängerung, oder zwischen die vorigen, wenn es die Absicht erfordert, anbringen.

§. 4.

Man kann auch hernach die Stellen der Stäbe durch kleinere Pflöcke besetzen, und diese, damit sie nicht so leicht ausgezogen werden können, etwas tief in die Erde schlagen.

§. 5.

Wenn die Linie durch Gebüsche oder über Berg und Thal geführet werden muß, und überhaupt, wenn etwas die Aussicht hinderndes dazwischen liegt, so entstehen hieraus bei dieser Arbeit mancherlei Schwierigkeiten, die aber Kürze halber dem mündlichen Vortrage vorbehalten werden müssen.

§. 6.

Zu Messung einer geraden Linie bedient man sich der Meßketten, oder Meßstangen, oder, welches wegen seiner Veränderlichkeit das schlech-

teste Werkzeug ist, der Meßschnüre. Zwo Personen werden zu dieser Arbeit erfordert, wenn sie nicht gar zu sehr in die Länge gezogen werden soll. Und der leichtste Fall ist der, wenn die Linie auf wagerechtem ebenen Boden liegt.

## §. 7.

Mit der Meßkette geschieht alsdenn die Messung folgendergestalt. Jeder von beiden Messenden führt einen Stab bei sich, der sich genau in die an den Enden der Kette befindlichen Ringe paßt, einen Kettenstab; der eine aber, den wir den Ersten nennen wollen, auch (allenfalls in einem Futteral) einige dünne leichte Stäbe, Zeichenstäbe. Der andere sticht seinen Kettenstab durch den Ring der Kette in den Anfang der zu messenden Linie, und zieht, wenn ein Meßstab daselbst steht, denselben indessen aus. Der erste geht mit dem andern Ringe der Kette fort, so weit es deren Länge zuläßt, schüttelt sie, damit sich ihre etwa verwickelten Glieder loswickeln, zieht sie an, und sticht seinen Kettenstab durch den Ring in die Erde, wobei der andere dafür sorgen muß, daß er in der geraden zu messenden Linie bleibe (§. 3.).

Sobald dieses erhalten ist, ziehen beide ihre Kettenstäbe aus, der erste sticht einen Zeichenstab an die Stelle des seinigen, und beide gehen weiter fort. So bald der andere an den Zeichenstab gekommen ist, nimmt er ihn nach sich, und sticht seinen Kettenstab an dessen Stelle durch den Ring, das übrige geschieht wie vorhin. Kurz: der erste sticht bei jeder Ausspannung der Kette einen Zeichenstab ein, der andere aber sammlet sie nach und

nach. Zuletzt sieht man aus der Zahl der von dem andern gesammleten Zeichenstäbe, wie viele Kettenlängen die zu messende Linie habe, und darf nur noch die Zahl von Ruthen, Fuß, u. s. f. dazu rechnen, welche von dem letzten Zeichenstabe bis zu Ende derselben vorhanden waren.

§. 8.

Die Meßstangen pflegen gemeiniglich 1° lang gemacht zu werden. Man hat öfters deren nur eine, und schlägt sie über; alsdenn muß sie aber um eine Stangendicke kürzer sein. Besser ist es, wenn zwo Personen auch zwo Stangen haben, und wechselsweise der eine die seinige dichte vor des andern seiner auf die Erde legt, wobei der eine alle unpaaren und der andere alle paaren Ruthen (allenfalls laut) zählt. Damit aber hierbei nicht von der geraden Linie abgewichen werde, so ist rathsam, in dieselbe mehrere Stäbe nach und nach einzustechen, und von einem zum andern eine dünne Schnur auszuspannen, welche den Messenden zum Leitfaden dienen kann.

§. 9.

Wenn eine bergauf und bergab gehende Linie gleichwohl horizontal gemessen werden soll: so kann man nicht die ganze Meßkette, folglich nicht beide Ringe an deren Ende, sondern etwa 1°, wenigstens nur ein solches Stück derselben gebrauchen, welches der eine der Messenden mit der Hand genugsam ausspannen kann; und muß bergauf der hinterste, bergab aber der vorderste derselben die Kette so hoch über der Erde halten, daß sie genau wagerecht liege.

Siche-

Sicherer geht man hierbei, wenn man anstatt der Kette eine Meßstange gebraucht, an welcher eine Setzwage angebracht ist. Auch ist an einem genau senkrechten Stande der Stäbe, wenigstens desjenigen, an welchem die Kette oder Stange über der Erde gehalten werden muß, hier mehr als oben (§ §. 7. und 8.) gelegen, wozu einige ein Senkblei daran anbringen.

## §. 10.

Wenn man die Höhe einer schräge anlauffenden Anhöhe, eines Hügels messen wollte, könnte man dieses bei der eben beschriebenen Arbeit zugleich erreichen, wenn man sich entweder abgetheilter Stäbe anstatt der gewöhnlichen bediente, oder doch jedesmal die Höhe des einen Endes der Meßstange über der Erde, so bald sie in einer horizontalen Lage ist, mit einem Maaßstabe mässe, und wenn man auf den Gipfel gekommen ist, alle diese Höhen zusammen rechnete. Wobei sich von selbst versteht, daß wenn der Boden abwechslend wäre, und einige dieser Höhen auf die andere Seite der Stange fielen, man deren Summe von der Summe der andern abzählen müßte.

# II. Von Messung und Aufnehmung der Winkel.

## §. 11.

Die Messung eines Winkels nach Graden, Minuten u. s. f. geschieht am bequemsten mit dem sogenannten Astrolabium. Man stellt dasselbe so, daß sein Mittelpunkt gerade über dem

Scheitel

Scheitel des Winkels stehe, welches man durch ein an das Stativ gehenktes Senkblei erhält. Die Fläche des Astrolabiums aber stellt man mit Hülfe einer Setzwage horizontal. Alsdenn zielt man durch das unbewegliche Lineal oder Seherohr nach einem Punkte, z. B. nach einer Stange, in dem einen Schenkel des vorgegebenen Winkels, worauf man das Instrument festschraubt. Eben so zielt man durch das bewegliche Lineal nach einem Punkte in dem andern Schenkel des Winkels. Hernach zählt man die zwischen beiden Linealen befindliche Grade u. s. f. Eben so viele kommen dem Winkel zu. (G. §. 62. und §. 19.)

§. 12.

Diese Messung eines Winkels ist nicht nur zu trigonometrischer Auflösung mancher Aufgaben nöthig; sondern muß auch vorhergehen, wenn man denselben mit Hülfe des Transporteurs auf das Papier tragen will. Wie dieses leztere geschehe, ist bekannt. Es ist aber wegen der sowohl beim Messen als Auftragen leicht zu begehenden kleinen Fehler nicht rathsam.

§. 13.

Ein anderes Werkeug zu **Messung der Winkel** ist die **Boussole**. Man stellt sie wie das Astrolabium auf. Zielt durch die Dioptern nach jedem Schenkel des Winkels, und bemerkt jedesmahl den Grad, den die Spitze der Magnetnadel anzeigt. Es ist zu Vermeidung der Verwirrung gut, wenn die Dioptern nur einfach, und die Grade von 1 bis 360 nur auf einer Seite herum in einem fort gezählet sind. Will man die Grade zwischen beiden Stän=

Ständen der Nadel zählen, so hat man den Winkel in Graden.

§. 14.

Die gewöhnlichste Absicht hierbei aber ist die **Bringung des Winkels auf das Papier.** Wenn der eine Schenkel, und in demselben der Scheitel des Winkels schon bestimmt sind: so legt man das Lineal der Boussole daran. Hernach dreht man den Tisch, oder wenigstens das Papier mit der Boussole so lange herum, bis die Nadel den auf dem Felde bei diesem Schenkel bemerkten Grad anweiset. Alsdenn läßt man das Papier unverrückt, dreht aber die Schärfe des Lineals an dem Scheitel des Winkels so lange herum, bis die Nadel den bei dem andern bemerkten Grad zeigt. Hierauf zieht man diesen an dem Lineal.

§. 15.

Die **Meßscheibe** dient nicht zu eigentlicher Messung, sondern zu Auftragung der Winkel. Man stellt sie wie die vorigen Instrumente auf. Alsdenn zielt man nach dem einen Schenkel des Winkels Fig. 1., und macht sich an der Schärfe des Lineals gegen beide Enden zu kleine Zeichen, wie z. B. bei 1. 1. Hierauf zielt man, ohne die Scheibe zu verrücken, nach dem andern Schenkel, und macht wiederum solche Zeichen 2. 2. Wenn man die Zeichen machen will, so drückt man, wie leicht zu erachten, das Lineal durch die bei C befindliche Schraube ein wenig an; will man dieses aber wieder wegdrehen, so lüftet man es vorher, so viel nöthig.

§. 16.

§. 16.

Will man nun einen solchen **Winkel** in den zu machenden Riß bringen, so schraubt man das Lineal ab, nimmt das Papier herunter, und klebt es, so nahe wie möglich oder nöthig, auf oder neben das Papier, worauf der Riß kommen soll. Alsdenn zieht man durch den zum Scheitel des Winkels bestimmten Punkt mit 1. 1. und 2. 2. Parallellinien, welches am besten mit besonders dazu verfertigten rechtwinklichem Dreieck und Lineal geschieht. (G. §. 53.)

Daß die Fig. 2. mit 1. 1. und 2. 2. parallele Linien d a und b a eben den Winkel mit einander machen als jene, sieht man leicht, wenn man durch beide Scheitel c e zieht. Denn da 2 C e = b a e, und 1 C e = d a e (G. §. 23. N. 2.), so muß auch 2 C 1 = b a d sein. (G. §. 8. N. 5.)

§. 17.

Am kürzesten wird die **Aufnehmung** eines **Winkels** mit dem **Meßtische** (der Mensul) verrichtet. Man hängt das Lineal gerade über dem Scheitel des Winkels ein, welches sich mit Hülfe einer gehärteten Zange erhalten läßt, deren obere Spitze ungefähr bis auf die Mitte des Papieres geschoben werden kann, und an deren unterem Theile, gerade unter dieser Spitze, ein Senkblei hängt, welches also mit der Stelle der Spitze auf der Mensul unten am Boden übereinstimmt. Wenn der Scheitel des Winkels auf dem Papiere schon bestimmt ist, so muß der Meßtisch darnach gestellt werden. So bald dieses berichtiget ist, zielt man nach jedem Schenkel des Winkels, und zieht jedesmal an der Schärfe des Lineales eine Linie. So ist der Winkel aufgenommen.

§. 18.

§. 18.

Endlich kann man einen Winkel auch blos mit Meßkette und Stäben auf dem Felde aufnehmen, und mit Hülfe des verjüngten Maaßstabes zu Papiere bringen. Gesetzt der Winkel Fig. 3. N. 1. A auf dem Felde sollte in dem Risse aus a über a p zu liegen kommen. Man mißt entweder die ganzen Schenkel AB, AC, und ihre Oeffnung an den Enden B C; oder man steckt in denselben beliebige gleiche oder ungleiche Stücke AD, AE ab (§. 3.), und mißt diese nebst ihrer Oeffnung D E. So viel Theile des grosses Maasses (z. B. Fuß) nun eine jede dieser Linien hat, so viel Theile des verjüngten Maaßstabes nimmt man an ihrer Stelle, und beschreibt mit diesen Seiten in gehöriger Lage (G. §. 41.) das Dreieck a e d (ohne gleichwohl e d auszuziehen); alsdenn ist a = A.

Kann man aber nicht in den Winkel Fig. 3. N. 2. (D A C) hineinkommen, oder findet man dieses, weil er zu stumpf ist, oder aus andern Ursachen unbequem, so zieht man einen seiner Schenkel (C A) nach Belieben bis E zurück, und verfährt mit den Dreiecken E D A und e d a eben so. Wenn DAE = d a e, so ist auch D A C = d a c. (G. §. 18. N. 2.)

Den Grund des in diesem §. gemachten und öfters vorkommenden Schlusses wollen wir hier ein für allemahl anzeigen. Die Seiten des kleinen Dreieckes verhalten sich unter einander, wie die Seiten des Großen (G. §. 8. N. 8.), und sind ihnen daher proportional (§. 77. N. 2.); die Dreiecke also ähnlich (§. 82. N. 3.), und die Winkel A und a gleich.

§. 19.

§. 19.

Der Beschreibung des angeführten Werkzeuges haben wir uns theils zu Ersparung der Kupfertafeln, theils deswegen enthalten, weil dasselbe bekannt ist, und sich am besten bei der Vorzeigung beschreiben läßt. Wohin wir auch die Beurtheilung desselben, und die etwa über ihre Mängel oder Verbesserungen zu machenden Anmerkungen, versparen.

## III. Von Absteckung der Winkel und der Linien unter einer gewissen Lage.

§. 20.

Um einen in Graden gegebenen Winkel auf einen gegebenen Schenkel und aus einem gewissen Scheitel abzustecken, bedient man sich am bequemsten des Astrolabiums. Man schiebt das bewegliche Lineal auf den gehörigen Grad, stellt das Instrument gerade über dem Scheitel des Winkels, und wendet es so herum bis man durch die Diopteru des einen Lineals (eine kleine Ueberlegung wird zeigen, welches es sein müsse) einen Punkt in dem gegebenen Schenkel erblickt. Hernach zielt man durch das andere, und läßt in der Linie, welche man übersieht, irgendwo einen Stab einstecken. So ist die Sache geschehen.

Man merkt leicht, daß eben dasselbe auch durch die Boussole mit einer kleinen Veränderung geleistet werden kann.

§. 21.

Wenn der Winkel auf der Scheibe oder dem Meßtische gegeben ist: so wird man sich leicht

leicht durch ein fast dem vorigen ähnliches verfahren, auch ohne besondere Regeln zu helfen wissen, um denselben auf dem Felde abzustecken.

§. 22.

Will man einen auf dem Felde vorkommenden Winkel Fig. 4. A, an einem andern Orte, aus dem Scheitel L auf dem Schenkel LM mit bloßen Stäben und Meßketten abstecken, so kann dieses folgendergestalt geschehen.

Man stecke A D nach Belieben ab, und mache L N ihr gleich. A E nehme man so, daß sie gerade eine gewisse Anzahl Ruthen, oder halbe Ruthen, betrage, damit man durch den Ring daselbst ein Stäblein stecken könne; und von da an auf der Kette messe man E D. Den Ort der Kette, wo D hintrift, halte man mit der Hand an N, hänge den Ring am Ende derselben in L, und ein anderer spanne sie von dem Stäblein an zu beiden Seiten gleich aus; so wird dieses den Ort O anzeigen, wo noch ein Stab einzustecken ist. Und O L N wird = E A D sein. (G. §. 30. N. 3.)

§. 23.

Daß man mit dem Astrolabium, der Boussole, der Scheibe und dem Meßtische aus einem gegebenen Punkte Fig. 5. C einer geraden Linie A B eine andere senkrecht abstecken könne, ist klar, weil man aus C auf C A einen rechten Winkel abstecken kann.

§. 24.

Um eben dieses mit Stäben und Meßkette zu leisten, steche man in dieser Linie Fig. 5. A B in be-

liebigen gleichen Weiten von C z. B. in E und F Stäbe ein. Auf diese hänge man die äußersten Ringe der Kette; ihre Mitte aber ergreiffe man mit der Hand, und spanne sie gleichförmig aus; oder, wenn dieses der Raum nicht zuläßt, zähle man von der Mitte an gleich viel halbe oder ganze Ruthen zurück, fasse sie da zusammen, und stecke allenfalls durch die daselbst zusammenkommenden Ringe ein Stäblein, so wird der Ort der Hand, oder des Stäbleins, den Ort D auf dem Boden anzeigen, wo ein Stab zu Absteckung der verlangten Linie C D einzustechen ist.

Man sieht leicht, wie dieses mit einer bloßen auch unabgetheilten Schnur ebenfalls ausgerichtet werden kann.

Die Dreiecke D C E und D C F sind nämlich ganz gleich (G. §. 30. N. 3.) daher auch die Winkel um C.

§. 25.

**Wenn der Punkt Fig. 6. (C) durch welchen eine auf A B senkrechte Linie abgesteckt werden soll, außer derselben liegt: so kann es mit Stäben und Meßkette so verrichtet werden:** man legt einen von den äußersten Ringen um den Stab in C, und tritt mit ausgespanntem Theile der Kette bis hinter A B zurück. Hier sticht man durch einen beliebigen Ring einen Stab, hält denselben gerade herunter, und geht ohne den ausgespannten Theil der Kette nachzulassen, so weit als nöthig, um C herum; einen Gehülfen aber läßt man die Oerter D und E bemerken, wo man mit dem Stabe in die Linie A B kommt. Hier sticht man Stäbe ein, und theilt D E in zween gleiche Theile, wel-

ches

ches entweder durch Messen, oder mit Zusammenschlagung einer von D bis E reichenden Schnur leicht geschehen kann. Endlich sticht man in ihrer Mitte F den zu Absteckung der verlangten Linie CF erforderlichen Stab ein. (G. §. 30. N. 3.).

§. 26.

Wenn man mit einer geraden Linie Fig. 7. A B eine andere in einer gegebenen Weite parallel abstecken soll: so richtet man aus beliebigen Punkten derselben C und E zwo senkrechte Linien auf (§. 23 oder 24.), macht sie der verlangten Weite gleich (§. 3.), und sticht in ihre Enden D und F Stäbe, welche die Parallellinie bezeichnen.

§. 27.

Soll aber dieselbe sonst durch einen gewissen Punkt Fig. 8. G mit A B parallel lauffen: so sticht man in einen beliebigen Punkt H von A B einen Stab, und steckt aus dem Scheitel G auf dem Schenkel G H einen Winkel I G H = A H G ab (§. 20 - 22.). Alsdenn ist G I mit A B parallel, (G. §. 22. N. 1.)

§. 28.

Folgende Art, eben dieses blos mit Stäben und Meßkette zu leisten, können wir nicht vorbeigehen. Gesetzt man solte Fig. 9. durch M mit L K eine Parallellinie abstecken. Man theile K M in zween gleiche Theile in N, und steche daselbst einen Stab ein. Einen andern steche man in O, welcher Punkt entweder in der Linie K L selbst, oder auch in ihrer Verlängerung liegen

kann. Hernach trage man ON in P zurück, und steche dahin einen Stab. Alsdenn dienen P und M zu Bezeichnung der gesuchten Linie.

Die Dreiecke P M N und O K N sind gleich (G. §. 30. N. 2.); daher die Winkel derselben P und O. Folglich P M mit K L parallel (G. §. 22. N. 1.).

## IV. Von künstlicher Messung solcher Linien, denen man nicht beikommen kann.

### §. 29.

Die Linien, von denen hier die Rede ist, sind entweder Horizontallinien, d. i. Längen, Breiten, Weiten u. d. g., oder Vertikallinien, d. i. Höhen oder Tieffen. Bei den ersteren sind wiederum die Fälle verschieden, je nachdem man zu ihren beiden Enden, zu einem, oder gar keinem derselben kommen kann.

### §. 30.

Gesetzt: man gienge mit Messung des Abstandes Fig. 10. A B zweener Oerter A und B um, von deren einem man nicht gerade zu zu dem andern kommen könnte, es mögen Gebüsche, Morast oder andere Hindernisse im Wege sein, welche man aber beide aus einem dritten Orte C sehen, und deren horizontalen Abstand von demselben man messen könnte: so verfährt man, nach Verschiedenheit des Werkzeuges verschiedentlich, folgendermaassen.

A) Wenn der Boden nicht allzu uneben ist, so kann man Fig. 10. N. 1. mit Stäben und Meßkette fertig werden. Man sticht nämlich in

C

C einen Stab, mißt A C und B C, und trägt beide in gerader Linie zurück (§. 3.), jene in E, diese in D, wo man Stäbe einsticht. Alsdenn mißt man D E, welche = A B ist. (G. §. 30. N. 2.)

Man kann auch die Hälften, oder kleinere Theile von A C und B C in e und d zurücktragen. Alsdenn ist aber d e der eben so vielte Theil von A B. (G. §. 82. N. 2.)

B) Auf dem Papiere kann die Messung folgendermaassen verrichtet werden. Man bringt den Winkel Fig. 10. N. 2. C, am bequemsten mit dem Meßtische, sonst auf andere Art (§. 11-18.) auf das Papier, mißt C A und C B, und trägt so viel Theile des verjüngten Maaßstabes aus C in a und b, als die damit übereinstimmende Linie Theile des großen Maasses hatte. Hernach mißt man a b nach eben dem verjüngten Maaßstabe, und schließt, daß A B eben so viele Theile des großen Maasses in sich halte.

Der Schluß ist leicht aus G. §. 82. N. 2. und §. 8. N. 8. herzuleiten.

C) Trigonometrisch. Man mißt den Winkel Fig. 10. N. 1.) A C B nebst den Seiten A C und C B, woraus man A B nach Tr. §. 23. berechnet. Die Auflösung ist etwas weitläuffig, kann aber kürzer durch den folgenden §. geschehen, wenn man etwa von A nach B sehen kann.

## §. 31.

Wenn die Oerter Fig. 11. A und B deren Weite von einander man sucht, so liegen, daß man aus einem gewissen Stande C beide sehen, des einen A Abstand von ihm messen,

und aus diesem A den andern B sehen kann (wenn man z. B. die Breite eines Flusses messen wollte): so fängt man es folgendermaassen an.

A) **Mit Stäben und Meßkette** Fig. 11. N. 1., wenn es die §. 29. angeführte Bedingung zuläßt. Man sticht einen Stab in C, und einen andern in die (hier verlängerte) Linie A B, wo man will, in D. Alsdenn mißt man DC und AC und trägt sie nach F und E zurück, wohin man Stäbe sticht. In der Linie F E geht man fort, bis man C mit B in gerader Linie sieht. Hier, in G, sticht man einen Stab ein. Alsdenn mißt man GE, welche = AB ist.

Denn weil E G mit A B parallel ist (§. 27.), so sind die Winkel C A B und C E G der Dreiecke gleiches Namens gleich (G. §. 23. N. 1.). Da nun die Winkel bei C vertikal, und die Seiten A C und C E ebenfalls gleich sind, so ist AB = GE. (G. §. 30. N. 1.)

Trüge man anstatt A C und D C ihre Hälften oder kleinere Theile in e und f zurück, so würde e g auch der eben so vielte Theil von A B sein.

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke C A D und C e f (G. §. 82. N. 2.) sind die Winkel C A D und c e f gleich, folglich e g mit A B parallel (G. §. 23. N. 1.), und die Dreiecke C A B und C e g ähnlich (G. §. 82. N. 1.), daher C A : AB = c e : e g.

B) **Auf dem Papiere.** Fig. 11. N. 2. Man sticht, wie vorhin, einen Stab in D, bringt die Winkel D C A und A C B auf das Papier, mißt C A und C D und trägt ihr Maaß nach dem verjüngten Maaßstabe aus C in a und d. Alsdenn zieht man d a fort bis b, und mißt a b, deren Maaß im großen genommen = A B ist. (G. §. 82. N. 1. und 2.)

C)

C) Eine andere Art Fig. 11. N. 3., eben dieses mit dem Meßtische insbesondere zu leisten, ist folgende. Der Stab in D wird weggelassen. Man nimmt in C den Winkel C auf. Alsdenn mißt man C A, und trägt sie aus C nach dem verjüngten Maaßstabe in a. Hierauf sticht man in C einen Stab, und trägt den Meßtisch in A, woselbst man ihn der Linie a C gemäß, das ist so stellt, daß a gerade auf A fällt, und man durch die Dioptern des über a C liegenden Lineals den Stab, welchen man in C gelassen, sieht. Alsdenn hängt man das Lineal in a ein, ziehlt nach B, und zieht nach dieser Gegend eine gerade Linie, welche der aus C gezogenen in b begegnet. Worauf man a b mißt, deren Maaß im Großen genommen = A B ist (G. §. 82. N. 1.)

Man merke hierbei insbesondere die Stellung des Meßtisches einer Linie gemäß an, um deren willen wir diese, der vorhergehenden sonst nicht gleich zu schätzende, Auflösung der Aufgabe angeführt haben.

D) Trigonometrisch. Man mißt die Winkel Fig. 11. N. 3. C und A nebst der Seite C A, und berechnet A B. (Tr. §. 20.)

## §. 32.

Ob sich gleich zur Wahl des Standes C in diesen Fällen keine bestimmte Regeln geben lassen, so ist doch dieselbe nicht ganz gleichgültig. Wir müssen uns in diesen Anfangsgründen damit begnügen anzumerken, daß sowohl allzuspitzige als zu stumpfe Winkel leicht im Aufnehmen oder Messen Fehler veranlassen. Welche zu vermeiden man dahin zu sehen hat, daß die Seiten des Dreieckes, worauf die Aufgabe beruhet, einander nicht gar zu ungleich werden.

§. 33.

Wenn man die Weite zweener Oerter Fig. 12. A und B sucht, zu deren keinem man kommen kann, von denen man z. B. durch einen Fluß abgesondert wird, so fängt man es folgendermaaßen an.

A) Mit Stäben und Meßkette. Man sucht ungefähr gleich weit von beiden einen Stand Fig. 12. N. 1. C, aus welchem man nach ihnen sehen kann. Alsdenn mißt man A C und B C jede besonders (nach §. 31. A), trägt diese in D und jene in E zurück, und mißt zuletzt D E, welche = A B ist. (G. §. 30. N. 2.).

B) Auf dem Papiere kann dieses vorzüglich durch den Meßtisch Fig. 12. N. 2. geleistet werden; wie wohl es nicht schwer sein wird, die hier folgenden Vorschriften auch auf anderes Werkzeug zu Aufnehmung der Winkel anzuwenden. Man erwählt zween Stände C und D, in deren einen C man zuerst den Meßtisch stellt, da unterdessen in den andern (D) ein Stab gestochen wird. Hier (in C) nimmt man die Winkel A C B und B C D auf, mißt alsdenn C D, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe aus C in d. Hierauf sticht man in C einen Stab, und stellt den Meßtisch in D der Linie d C gemäß. Hier hängt man das Lineal in d, und zieht gegen A und B gerade Linien, welche den vorhin nach diesen Gegenden gezogenen in a und b begegnen. Man mißt endlich a b, welche im Grossen genommen = A B ist.

C) Auch kann eben dieses ohne Versetzung des Meßtisches aus dem Stande Fig. 12. N. 3. C geschehen. Außer dem Stabe in D sticht man

noch

noch einen in E, in gerader Linie mit D und B, und einen andern in F, in gerader Linie mit D und A. Alsdenn nimmt man die Winkel A C B, B C D, F C D, E C D auf, mißt C F, C E, und C D, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe aus C in f, e und d. Durch d und e, wie auch durch d und f, zieht man gerade Linien, welche C B und C A in b und a begegnen. Endlich mißt man a b, welche im Großen genommen = A B ist

Da der Beweis dieser beiden Fälle (B und C) etwas weitläuffig ist, so wollen wir nur das allgemeine davon anführen, die Ausführung aber dem Leser überlassen. Das Dreieck C a d ist ∽ C A D und C d b ∽ C D B, welches im Falle B unmittelbar aus G. §. 82. N. 1., im Falle C aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke C e d, C E D und C f d, C F D, die man aus N. 2. ang. §. erkennet, folgt. Daher ist C d : C D sowohl = a C : A C als = C b : C B. Da nun in den Dreiecken a C b und A C B, außer der angeführten Proportion, auch die Winkel a C b und A C B gleich sind: so ist (N. 2. ang. §.) a b : A B = a C : A C das ist = C d : C D.

D) Trigonometrisch. Man messe zween von den Winkeln Fig. 12. N. 2. A C B, B C D, A C D, und zween von B D A, A D C, B D C, wodurch in beiden Fällen der 3te mit gemessen wird. Nun kann man A B so wohl zu dem Dreiecke A C B als A D B ziehen. Im ersten Falle suche man in dem Dreiecke A C D durch C D, A C D, C D A die Seite C A, und in dem Dreiecke C D B durch C D, C D B, D C B die Seite C B (Tr. §. 19. 20.), und endlich in dem Dreiecke A C B durch A C, C B und A C B die Seite A B. (Tr. §. 23.)

§. 34.

Die Weiten dreier Oerter Fig. 13. A, B und C von einander sind bekannt. Man kann sie alle aus einem 4ten Orte sehen, und soll aus ihrer Lage unter einander die Entfernung eines jeden von ihnen von diesem 4ten Orte finden.

Auf dem Papiere läßt sich dieser Fall folgender Maaßen auflösen. Man nehme die Winkel auf, unter denen sie aus dem 4ten Orte S erscheinen. Zwischen A und B liege a S b, zwischen B und C aber b S c, und daher a S c zwischen A und C. Da ihre Entfernungen, hiemit die Seiten des Dreieckes A B C, dessen Ecken sie ausmachen, bekannt sind, so nehme man diese nach dem verjüngten Maaßstabe, und beschreibe damit das dreieck A B C. Durch S ziehe man senkrecht auf S b die Linie K L, wodurch 4 und 3 die Ergänzungen der Winkel 1 und 2 zu 90° entstehen. Hierauf mache man A B D = 4 und C B E = 3; aus den Mitten von A B und B C aber richte man R D und Q E senkrecht auf, welche den Schenkeln der Winkel in D und E begegnen. Alsdenn beschreibe man mit der Eröfnung D B aus D, und mit E B aus E Kreise, welche einander außer B noch in P durchschneiden. Endlich ziehe und messe man P A, P B, P C, welche im großen genommen die gesuchten Abstände sind.

Weil 4 = A B D, so ist 1 = D (G. §. 29. N. 1.) D aber ist = o (G. §. 64.). Daher o = 1. Ferner 3 = C B E, daher 2 = E = p. Da endlich o + p = 1 + 2, so erscheinen die Punkte A, B, C aus P unter den gehörigen Winkeln. Daß aber keine andere größere oder kleinere Kreise an der Stelle der beschriebenen statt finden, erkennt man daraus, weil eine jede

Seite

Seite z. B. A B durch den gegebenen Winkel die Sehne eines gewissen Bogens wird, wodurch der Halbmesser eben so gut, als durch ihn die Sehne, bestimmt wird.

§. 35.

Bei Messung der Höhen bildet man sich allezeit eine Horizontallinie Fig. 14. c H ein, die von dem Mittelpunkte des Instruments, oder dem Punkte, wo das Lineal hängt, gerade auf die zu messende Linie geht; und man bekümmert sich theils um die Höhe A H des Gipfels A über dieser Linie, theils um die Tiefe des Fußes B unter derselben. Da die Richtung der Schwere (die Vertikallinie), wonach die Höhen beurtheilt werden, jene wagerechte Linie, (in solchen Weiten, als hier statt finden) senkrecht trift, so sind die dabei vorkommende Dreiecke rechtwinklich.

§. 36.

Von dem oben angeführten Werkzeuge finden hier fast nur der Meßtisch und das Astrolabium statt; der erstere auch nicht einmahl ohne Unbequemlichkeit, daher von verschiedenen besondere Höheninstrumente erdacht worden sind. Wir wollen uns Kürze halber damit begnügen, die Auflösung der Hauptfälle mit dem Meßtische und dem Astrolabium zu beschreiben.

§. 37.

Wenn die zu messende Höhe Fig. 14. A B so liegt, daß man aus der Station C gerade unter ihren Gipfel A kommen, und ihre Weite C B von derselben messen kann: so geht man auf folgende Art zu Werke.

A) **Mit dem Meßtische.** Man zieht vorher auf demselben mit einer Seite D E eine Parallellinie c h, und hängt das Lineal in einen beliebigen Punkt c derselben. Alsdenn dreht man den Meßtisch so, daß er vertikal gerade gegen die zu messende Linie steht (so daß seine verlängerte Ebene dieselbe in sich begreiffen müßte), bringt die Zange (§. 17.) an c, da denn das Senkblei die wahre Station C anweisen wird. Die genannte Seite D E richtet man mit der Setzwage wagerecht. Alsdenn zielt man mit dem Lineal nach A und B, und zieht Linien auf dem Meßtische. Hierauf mißt man C B horizontal, und trägt sie auf dem nunmehr wieder umzukehrenden Meßtische aus c auf die besagte Parallellinie in h, durch welchen Punkt man a b senkrecht zieht. Diese, im großen genommen, ist der Höhe A B gleich. (G. §. 82. N. 1.)

Will man auch nach der Horizontallinie zielen, und durch einen Gehülfen den Punkt H bezeichnen lassen, so braucht man keine Linie gegen B zu ziehen, und kann H B besonders messen. Auch kann man bei ebenem Boden H B der Höhe des Instruments gleich annehmen.

B) **Trigonometrisch.** Man stellt die Ebene des Astrolabiums wie des Meßtisches seine; der Durchmesser kann nach der verschiedenen Einrichtung des Instruments entweder mit der Setzwage horizontal, oder mit einem Senkblei vertikal gerichtet werden. Alsdenn zielt man sowohl nach dem Gipfel A, als (wenn man will) nach dem Fusse B. Steht der Durchmesser horizontal: so werden die bemerkten Grade die Winkel A c H und H c B unmittelbar anzeigen; widrigenfalls zieht man die bemerkten Grade von 90° ab, um sie selbst zu erfahren. Mißt man nun ferner C B = c H, so

kann

kann man in den Dreiecken c H A und c H B die Seiten H A und H B berechnen. (Tr. §. 18.)

Man sieht leicht, daß man es mit H B wie vorhin machen kann.

## §. 38.

Wenn man eine Höhe Fig. 15. (A Q) zu messen hat, zu deren Fuße (Q) man nicht kommen kann, so verfährt man folgendermaassen.

A) **Mit dem Meßtische.** Man wählt zween Stände C und D in einer Ebene mit A Q. In den ersten C stellt man den Meßtisch, und bemerkt alles, was von seiner Stellung und Ziehung der Parallellinie c h im vorigen §. erinnert worden, zieht auch an dem in c eingehängten Lineal gegen A, und (wenn es verlangt wird) B zu gerade Linien. In D sticht man einen Stab, mißt die Höhe C c, und macht in eben dieser Höhe von D in d ein Zeichen an dem Stabe, worauf man auch aus c gegen d zu eine Linie zieht. C D mißt man, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe aus c in d. Alsdenn sticht man in C einen Stab, und macht in der bemerkten Höhe C c ein Zeichen daran. Hierauf hängt man das Lineal in d ein; den Meßtisch bringt man nach D, so daß d auf demselben die Stelle des vorhin an dem Stabe gemachten Zeichens einnehme, welches man durch die Zange (§. 17.), und den Maaßstock, womit man C c = D d gemessen, erhalten kann; richtet auch den Meßtisch wiederum nach der Setzwage. Wenn man alsdenn nach dem vorigen Stande über d c zielt, und daselbst in c das Zeichen erblickt, so steht der Meßtisch richtig. Alsdenn zieht man gegen A und

und B zu Linien, welche den vorigen in a und b begegnen, von da man hernach auf die Horizontallinie a r und b h senkrecht zieht. Diese im Grossen genommen sind A R und H B oder R Q gleich.

Der Grund hiervon ist aus der Figur leicht zu finden.

B) Trigonometrisch. Was von der Stellung des Meßtisches (A), und von den an den Stäben zu machenden Zeichen gesagt worden ist, bemerke man auch hier bei dem Gebrauche des Astrolabiums. In C messe man (wie §. 37.) die Winkel A c H und H c B, überdem aber A c d, welcher Summe von 360° abgezogen d c B übrig läßt. Alsdenn messe man aus D die Winkel A d c und c d B. Auch messe man D C = d c. So kann man in dem Dreiecke d c A durch d c, d c A und A d c die Seite A C (Tr. §. 20.), und durch diese nebst A c H die Seite A R (Tr. §. 19.); in dem Dreiecke d c B aber durch d c, c d B und d c B die Seite c B und durch diese nebst B c H in dem Dreiecke B c H die Seite H B = R Q, hiermit die ganze Höhe A Q finden.

§. 39.

Da hier die Hauptsache auf die Aufnehmung oder Berechnung der Linie A c, und die Findung der Winkel A c H und H c B, welche letztere keine Schwierigkeit hat (§. 37.), ankommt: so läßt sich die Aufgabe noch auf mancherlei andere Arten auflösen. Wenn z. B. die Station D nicht hinter C, sondern derselben seitwärts läge, und man in dem ersten Falle den Meßtisch, in dem 2ten das Astrolabium, so neigte, daß dessen verlängerte Ebene in C durch A und D, in D durch A und C gienge, so ließen sich die Winkel A c d und A d c aufnehmen oder messen, woraus nebst der Linie D C auch A C gefunden würde.

Auch

Auch kann die Höhe aus übereinanderliegenden Stationen gemessen werden, wobei wir uns aber um der dabei vorfallenden Schwierigkeiten und unerheblichen Nutzens willen nicht aufhalten.

§. 40.

Die Messung einer schrägen Anhöhe, deren Gipfel weit entfernt ist, läßt sich auf diese Art nicht bestreiten. Zu den leicht zu begreiffenden Schwierigkeiten, welche aus den zu kleinen Winkeln entstehen, kommt noch die Unsicherheit des Zielens, welche durch die Brechung des Lichtes in der Luft verursacht wird. Diese Dinge gehören theils zur Nivellirkunst, theils zur Mathematischen Geographie.

# Zweiter Theil.

# Von den Flächen.

## I. Von Aufnehmung der Felder.

§. 41.

Wenn sich die zu Berechnung eines Feldes nöthigen Linien auf dem Felde eben so leicht, als auf dem Papiere, ziehen und messen ließen: so brauchte man nur die in der Geometrie (§. 138. u. folg.) gegebenen Regeln darauf anzuwenden. Da aber dieses nicht ist, so pflegt man ein Feld, oder einen andern Platz, vorher aufzunehmen oder in Grund zu legen, das ist, eine Figur auf dem Papier zu zeichnen, die der Figur des Feldes ähnlich ist.

§. 42.

Da aus dem vorigen leicht erhellet, daß die Enden derer Linien, und die Spitzen derer Winkel, welche man messen oder aufnehmen will, auch in

in der Ferne sichtbar gemacht werden müssen, so pflegt man sowohl die Ecken eines aufzunehmenden Feldes, als auch, wenn man sich nicht mit dem blossen Umfange begnügen will, andere merkwürdige Punkte, welche mit in den Riß kommen sollen, mit Stäben zu bezeichnen, welches man die Absteckung eines Feldes nennet. Kommen unter den aufzunehmenden Linien krumme vor, so sticht man entweder mehrere Stäbe hinein, und betrachtet sie als die Summe mehrerer geraden Linien, oder mißt ihre Abweichungen von einer geraden Linie besonders, wovon unten geredet werden soll.

## §. 43.

Eine andere nöthige Vorbereitung zu der Aufnehmung eines Feldes (bei dem Gebrauche des einzigen Meßtisches kann man derselben entbehren) ist diese, daß wenn man dasselbe etwas genauer betrachtet, und überlegt hat, auf welche Art man dabei zu Werke gehen will, man sich aus freier Hand einen **ungefähren Entwurf** desselben (einen Brouillon) mache, wenigstens eine Figur, die eben so viele Ecken hat, als das Feld, und in denselben diejenigen Linien hineinbringe, welche entweder selbst, oder deren Winkel mit andern gemessen oder aufgenommen werden sollen. Will man die Stäbe mit Buchstaben bezeichnen, und in die Ecken des Entwurfs eben dieselben setzen, so wird man einer etwa entstandenen Verwirrung desto leichter abhelfen können.

## §. 44.

Gesetzt, man hätte ein Feld (ABCDEFG) Fig 16. aufzunehmen, in welchem sich in H ein Brunnen be-

befindet, der mit in den Riß kommen soll, man könnte in demselben überall herumgehen, und scheute die dazu nöthige Mühe nicht: so könnte man es mit Stäben und Meßkette folgendermaassen verrichten.

Man bildet sich in demselben so viele Diagonalen ein, daß dasselbe dadurch in lauter Dreiecke getheilt wird, und eine Linie C I, die durch H und eine der benachbarten Ecken C geht. In dem Entwurf, wozu a b c d e f g hinreichend wäre, zieht man alle diese Linien. Alsdenn mißt man alle Seiten und Diagonalen, und schreibt, so bald dieses mit einer geschehen ist, ihr Maaß in dem Entwurf gehöriges Ortes an. Auch mißt man C H und F I, wodurch man auch I E erhält, und bemerkt es.

Aus diesem Entwurf ist es leicht, das Feld auf das Papier zu bringen. Denn da alle Seiten derer Dreiecke A B G, G B F u. s. f., woraus es zusammengesetzt ist, gemessen sind, so darf man nur ihr Maaß nach dem verjüngten Maaßstabe nehmen, und die Dreiecke im kleinen in der Ordnung, die der Entwurf anweiset, beschreiben (G. §. 41.), zuletzt aber F I auftragen, C I ziehen, und C H darauf abstechen.

So mühsam diese Art der Aufnehmung ist, so grossen Vorzug hat sie, wegen ihrer Genauigkeit, vor allen andern.

## §. 45.

Wenn man aus einer Stelle Fig. 17. A, entweder in einer Ecke, oder in der Fläche eines Feldes, alle Ecken oder sonst anzumerkende Punkte übersehen, und dahin messen kann: so bildet man sich nach allen diesen Punkten Linien

A B, A C, A D u. s. f. ein, und mißt nicht nur alle diese Linien, sondern nimmt auch die Winkel, welche sie mit einander machen, B A C, C A D u. s. f. auf, und merkt alles gehöriges Ortes in dem Entwurf an. Hernach bringt man die Winkel auf das Papier, trägt auf eine jede der gemessenen Linien aus A ihr Maaß nach dem verjüngten Maaßstabe, und zieht durch ihre Enden b c, c d u. s. f. die Seiten des Feldes.

Ungeachtet dieses auf vielfältige Arten geleistet werden kann (§§. 11 - 18.): so merkt man doch leicht, daß der **Meßtisch** hierbei die **geschwindeste, und dabei eben so richtige Arbeit, als irgend ein anderes Werkzeug leisten kann.** Denn man erhält dadurch nicht nur sogleich A B, A C, A D u. s. f. nach ihren Winkeln auf dem Papiere, sondern kann auch eine jede, so bald sie gemessen worden, so gleich im Kleinen auftragen, und die Figur a b c d e f g auf der Stelle vollenden.

## §. 46.

Die allerbequemste Art ein Feld aufzunehmen Fig. 18. ist diese, wenn sich zween Stände finden lassen, deren Weite von einander man messen, und aus deren jedem man nicht nur den andern, sondern auch alle Ecken des Feldes, oder sonst anzumerkende Punkte übersehen kann. Auch hier hat der **Meßtisch** unstreitig den **Vorzug**. Gesetzt, man wollte das Feld A B C D E F aus den Ständen P und Q, die die bemeldete Beschaffenheit hätten, aufnehmen.

Man stellet denselben in P, und zieht sowohl gegen alle Ecken, als den Stand Q gerade Linien.

Als-

Alsdenn mißt man P Q, trägt sie im Kleinen aus p in q, und sticht in P an die Stelle des Meßtisches einen Stab. Hierauf stellt man den Meßtisch in Q der Linie q p gemäß (§. 31. C.), und zieht wiederum gegen alle Ecken Linien, deren jede der aus P nach eben der Ecke gezogenen begegnet. Hierdurch werden die Punkte a b c d e f gefunden, zwischen welche man die Seiten der Figur zieht, und die denen A B C D E F gemäß liegen.

Daß die Figuren einander ähnlich sind, erkennt man auf die Weise. Die Dreiecke E P Q und e p q, imgleichen D P Q und d p q haben gleiche Winkel, daher sind die Seiten P E, p e der ersten und P D, p d der andern beiderseits den Seiten P Q, p q und folglich einander proportional. Da nun auch die Winkel E P D, e p d in den Dreiecken gleiches Nahmens gleich sein müssen (G. §. 8. N. 5.): so sind diese Dreiecke ähnlich (G. §. 82. N. 2.). Eben so erkennt man die Aehnlichkeit aller Dreiecke beider Figuren, und ihre eigene Aehnlichkeit. (G. §. 85. N. 1.)

Diese Art die Felder aufzunehmen hat zween Mängel. 1) Daß die zuspitzige Winkel dabei kaum zu vermeiden sind, wodurch die Punkte, welche sie bestimmen sollen, unsicher werden. 2) Daß wenn der Linien viele sind, man in der 2ten Station leicht diejenigen, welche man in der ersten gezogen, mit einander verwechselt. Man muß daher 1) solche Punkte, wie hier c und f, lieber noch auf andere Art zu bestimmen und 2) die Linien in der ersten Station durch Buchstaben, oder andere willkührliche Zeichen, von einander zu unterscheiden suchen.

## §. 47.

**Wenn man nicht in dem Felde herumgehen kann, als wenn es z. B. morastig, voller Buschwerk oder dergleichen wäre: so muß man**

sich damit begnügen, dasselbe aus dem Umfange aufzunehmen, d. i. man muß seine Seiten und Winkel in ihrer Ordnung aufnehmen, und dadurch die Figur auf das Papier bringen.

Daß zu den Winkeln das Astrolabium, der Meßtisch, die Boussole, und zwar wenn sie gut ist, mit einigem Vorzuge, auch Stäbe und Meßkette gebraucht werden können, wird man bei einigem Nachdenken leicht merken.

Da aber die Scheibe Fig. 19. N. 1. sich hier besonders mit großer Bequemlichkeit brauchen läßt: so wollen wir diese Verrichtung mit derselben um so mehr beschreiben, da ihrer bisher noch nicht insbesondere gedacht worden ist. Man soll das Feld A B C D E F G aufnehmen. Man macht sich vorher einen Entwurf N. 2 a b c d e f g, mißt alle Seiten des Feldes, und schreibt das Maaß einer jeden von ihnen in dem Entwurfe an seinen Ort. Diejenige, welche man zuerst gemessen hat, bezeichne man in demselben (allenfalls von außen) mit 1, die folgende mit 2 u. s. f. wie in der Figur.

Alsdenn stelle man die Scheibe in eine Ecke A, ziele nach G, mache nach (§. 15.) an dem Lineal 2 Strichlein, und bezeichne sie mit 1. 1. Hierauf schiebe man das Lineal ohne Verrückung der Scheibe nach B, schraube das Lineal fest, und bezeichne die Strichlein mit 2. 2. Hernach gehe man mit der Scheibe, ohne das Lineal zu lüften, in die Ecke B, drehe sie so, daß man den Stab A sieht. Alsdenn schraube man das Lineal los, drehe es nach C, schraube es wieder fest, und bezeichne die Strichlein mit 3. 3. Auf eben diese Art fahre man fort, und setze beständig an die Striche die

Zahl,

Zahl, welche in dem Entwurf bei der Seite, wonach man zielet, steht. Wenn man in G angelangt ist, kann man eine Probe anstellen, ob die Winkel richtig bemerkt worden sein. Denn wenn man das noch auf 7. 7. liegende Lineal losschraubt, und nach dem Stabe A richtet, muß es auf 1. 1. liegen. Wiedrigenfalls ist in Aufnehmung der Winkel ein Fehler vorgegangen, und muß, wenn derselbe beträchtlich ist, die Sache von neuen vorgenommen, oder auf andere Art nachgeholfen werden.

Um nun das Feld auf das Papier zu bringen, klebt man das von der Scheibe N. 3. genommene Papier (§. 16.) gehörig an, wählt den Punkt a so, wie man merkt, daß es sich mit der Gestalt des Feldes, und dem zum Risse bestimmten Papiere schickt, und zieht durch diesen Punkt mit 1. 1. und 2. 2. Parallellinien. Einem jeden der Schenkel dieses Winkels a giebt man vermittelst des Entwurfs nach dem verjüngten Maaßstabe seine gehörige Länge, wodurch man die Punkte g und b erhält. Durch b zieht man mit 3. 3. parallel, und giebt der Linie b c wiederum die für sie bemerkte Länge. Auf eine ähnliche Art fährt man fort. Wenn einwärts gekehrte Winkel vorkommen, so wird man dieses aus dem Entwurfe wahrnehmen. Ist man nun bis f gekommen, so muß die Linie, welche man mit 7. 7. parallel zieht, in den Anfangs bemerkten Punkt g fallen, und die Länge haben, welche ihr nach dem Entwurfe gebührt. Sonst merkt man, daß ein Fehler vorgegangen ist.

## §. 48.

Da bei oft veränderter Stellung des Instruments und Aufnehmung mehrerer Winkel kleine Fehler fast unvermeidlich sind: so ist es allezeit rathsam, in diesem Falle, wo möglich, eine oder einige Diagonalen mit zu messen. Gesetzt z. B. daß in den Winkeln C, D, und E entweder in der ersten Aufnehmung, oder bei der Auftragung auf das Papier gefehlt, die Diagonale B F aber mit gemessen worden wäre, so würde man durch deren Auftragung wenigstens den Fehler zeitiger entdecken, und die zu dessen Abhelfung nöthigen Untersuchungen anstellen können, ehe man noch die ganze Figur vollendet hätte.

Die Furcht zu großer Weitläuffigkeit erlaubt uns nicht, uns hierin weiter einzulassen.

## §. 49.

Wenn unter den Seiten eines Feldes Fig. 20. krumme Linien vorkommen, oder wenn man die krummen Wendungen eines Baches, Sees oder dergleichen aufnehmen soll, wo das §. 42. angegebene Mittel, mehrere Stäbe einzustechen, nicht hinreichend befunden wird: so steckt man eine solche Krümmung doch jederzeit als eine gerade Linie ab, oder theilet sie nach befinden nach mehreren geraden Linien ein, und bemerkt ihre Abweichungen von diesen. Wenn z. B. die Linie a c e k n aufgenommen werden sollte: so könnte man von a bis etwa q eine gerade Linie a q setzen. Von a bis e so weit die Höhlung geht, könnte man in a, b, c, d, e, f Stäbe stechen, und deren Abstände sowohl von einander a b, b c, c d, d e, e f, als von einem

nach

nach belieben in a m gewählten Punkte o messen. Man kann auch sowohl in diesem Falle, als insbesondere, da wo die erhabene Seite der krummen Linie liegt, von e bis k u. s. f., von der geraden so viel Perpendikularlinien h g, m l u. s. f. als man nöthig findet, aufrichten, und sowohl ihre Länge, als ihre Lage in am messen. Wenn diese nicht gar zu lang sind, so lassen sie sich nach Augenmaaße ohne großen Fehler auf der nach der Richtung a q ausgespannten Meßkette mit einem Maaßstocke nehmen, da man denn sowohl ihre Lage in a q. als ihre Länge gleich vor Augen hat. Wenn man hernach die gerade Linie a q zu Papiere gebracht, so trägt man die gedachten von ihr ausgezogenen Linien ebenfalls nach dem verjüngten Maaßstabe auf, und verbindet die dadurch gefundenen Punkte der krummen Linie nach dem Augenmaaße.

## §. 50.

Wenn eine sehr große Gegend z. B. ein ganzes Landgut, die Gegend einer Stadt oder dergleichen aufgenommen werden soll: so ist es nicht nur rathsam, sondern nothwendig, dieselbe in mehrere kleinere zu vertheilen, jede besonders, doch alle nach einerlei Maaßstabe aufzunehmen, und aus diesen kleineren Rissen den verlangten zusammen zu setzen.

## §. 51.

Wie aber in dergleichen Rissen die Wälder, Aecker, und Wiesen u. dergl. zu illuminiren, oder sonst von einander zu unterscheiden sein, muß man aus praktischen Schriftstellern z. B. Boehms gründlichen Unterrichte zur Feldmeßkunst, Penthers praktischer Geometrie u. a. m. lernen.

## II. Von der Berechnung und Eintheilung der Felder.

### §. 52.

So bald man ein Feld auf das Papier gebracht hat, so hat die Berechnung desselben nicht die geringste Schwierigkeit, und wird ganz nach (G. §. 138.) u. folg. verrichtet. Da die Felder mehrentheils vieleckig und von irregulärer Gestalt sind, so gehört sonderlich §. 142. hieher. Man theilt nämlich das Feld in Dreiecke, wählt deren Grundlinien und Höhen, berechnet einzelne Dreiecke oder Vierecke, und zählt zuletzt ihre Inhalte zusammen. Nur ist hierbei anzumerken, daß bei der Messung der Grundlinie und Höhen eben derselbe Maaßstab, womit man das Feld aufgenommen, gebraucht werden muß; und daß wenn die Theile wonach man mißt, anstatt der Fuße aufgetragen worden, der Inhalt des Feldes als Quadratfuß, wenn sie anstatt der Zolle genommen werden, als Quadratzolle anzusehen ist. u. s. f.

Der Schluß, den man von der aufgenommenen Figur auf das große Feld macht, beruhet darauf, daß die Höhen ähnlicher Dreiecke den Grundlinien proportional sind, und man also, wenn man die große Figur berechnen wollte, in der That eben dieselbigen Zahlen mit einander zu vervielfältigen haben würde.

Es sei z. B. ein Feld Fig. 21. A B C D E F G H auszurechnen, welches man in 6 Dreiecke getheilt hat, und A C = 100′, B o = 37′, D n = 33′, H d = 77′, A m = 60′, G l = 36′, F d = 62′, E k = 47′, G i = 61′; so verfährt man nach angef. Orte folgender Maaßen:

| | | |
|---|---|---|
| B o = 37′ | A m = 60′ | E k = 47 |
| D n = 33′ | G l = 36 | G i = 61 |
| 70 | 96 | 108 |
| A C = 100 | H d = 77 | F D = 62 |
| 7000 | 672 | 216 |
| 7392 | 672 | 648 |
| 6696 | 7392 | 6696 |
| 2) 21088 | | |

10544′ q = dem Inhalt des Feldes, d. i. 105° 44′ q.

## §. 53.

Der Inhalt eines Dreieckes läßt sich auch, ohne daß man nöthig hat, sich um die Höhe zu bekümmern, durch seine Seiten finden. Wenn man nämlich

1) alle Seiten zusammenzählt, und eine jede von der Summe der beiden andern abzählt,

2) die 4 Zahlen, welche man hierdurch erhält, mit einander vervielfältiget,

3) aus dem Vielfachen die Quadratwurzel zieht,

4) diese mit 4 theilt:

so hat man den Inhalt des Dreieckes.

Wolte man also in dem Falle, da sich alle Seiten messen lassen (§. 44.), um mehrerer Genauigkeit willen ein Feld so berechnen: so könnte man die Mühe des Aufnehmens ersparen.

Der Beweis hiervon läßt sich nicht wohl ohne Buchstabenrechnung geben. Man findet ihn in Kästners Anf. Gr. der ebenen Trigonometrie dem 21sten Satze.

## §. 54.

Zu der Eintheilung eines Dreieckes oder Viereckes unter gewissen Bedingungen giebt die Geometrie manche Kunstgriffe an die Hand. Da aber

diese bei der gewöhnlichen Gestalt der Felder selten angewandt werden können: so wollen wir uns auch nicht dabei aufhalten, sondern vielmehr zu einer allgemeinen Methode übergehen, mit Hülfe der Rechnung ein Feld in so viele gleiche Theile einzutheilen, oder ein so großes Stück davon abzuschneiden als man will. Mehrerer Deutlichkeit wegen wollen wir sie sogleich auf ein Beispiel anwenden.

## §. 55.

Gesetzt das vorhin berechnete Feld sollte in vier gleiche Theile getheilt, und der Anfang von der Seite des Dreieckes Fig. 22. A B C gemacht werden. Hierzu muß man den Inhalt eines jeden einzelnen Dreieckes wissen, welche nach den oben angenommenen Zahlen wären: A B C = 1850′ q, A C D = 1650′ q, A H D = 2310′ q, H D G = 1386′ q, G D F = 1891′ q, und D E F = 1457′ q.

Um nun den Inhalt eines jeden zu machenden Theiles zu wissen, theile man den Inhalt des Ganzen 10544′, q durch die Zahl derselben 4 : so kommt für jedes Viertheil 2636′ q. Dem Dreiecke A B C fehlen hierzu 786′ q. Man betrachte diese als den Inhalt eines Dreieckes, dessen Grundlinie A C wäre; so begreift man leicht durch eine Umkehrung der G. §. 140. gegebenen Regel, daß wenn man diesen Inhalt 786′ q durch die halbe Grundlinie 50′ theilt, der Antheil die Höhe eines dem A B C auf eben dieser Grundlinie A C zuzusetzenden Dreieckes sein müßte. Man ziehe also in der Weite dieses Antheils $15\frac{36}{50}$′ mit A C eine Paralle-

rallellinie p q, und verbinde p A, so ist A B C p $= 1850 + 786 = 2636'$ q $= \frac{1}{4}$ des Feldes. Von A C D bleibt nun, nach des Dreieckes A p C Abzug; noch 864′ q übrig. Zählt man hierzu A D H $= 2310'$ q, so kommen 3174′ q hiermit für einen Theil 538′ q zu viel heraus. Diese theile man mit $\frac{77}{2} = \frac{1}{2}$ H D, um die Höhe des Dreieckes zu erfahren, welches von der Seite H D her weggenommen werden muß. Der Antheil ist $11\frac{29}{77}'$, in welcher Weite also mit H D die Parallellinie r s gezogen wird, worauf man D r verbindet. Alsdenn ist A p D r $= 3174 - 538 = 2636'$ q $= \frac{1}{4}$ des ganzes Feldes. Zählt man nun zu H D r $= 538$ das Dreieck H D G $= 1386$, so entstehen 1924′ q, welches noch nicht genug ist. Nimmt man noch F D G $= 1891$ dazu, so kommen 3815, hiermit 1179′ q zu viel für ein Viertheil heraus. Man theile diese mit $31 = \frac{1}{2}$ F D, um die Höhe des von der Seite F D her wegzunehmenden Dreiecks zu erfahren. Sie ist $38\frac{1}{31}'$, in welcher Weite man also t v mit F D parallel zieht, und darauf t D verbindet. Alsdenn ist r D t G H das dritte, und t D E F das vierte Viertheil, welches man leicht durch die Rechnung probiren kann.

§. 56.

Man sieht leicht, daß wenn anstatt der Eintheilung in 4, eine andere verlangt würde; oder wenn ein Stück von gegebenem Inhalte abgeschnitten werden sollte, man auf eine ganz ähnliche Art verfahren müßte, daher es unnütz sein würde, hierüber weitläuffiger zu werden.

Ende der Feldmeßkunst.

---

Die

# Die allgemeinsten Begriffe vom Nivelliren.

§. 1.

Die Nivellirkunst (das Wasserwägen) lehret finden, um wie viel ein Ort auf der Oberfläche der Erde höher liege als der andere.

§. 2.

Die dazu erforderlichen Instrumente, die Wasserwagen (Wasserpäße, Niveaux) kommen darin überein, daß sie mit Durchsichten oder Fernröhren versehen sind, welche sich genau in die scheinbare Horizontallinie stellen lassen; es sei daß sie dieselbe unmittelbar anweisen, wie die gemeinen Wasserwagen, durch einen flüßigen Körper, oder ein wenig Luft über demselben; oder daß man sie, als die auf die Richtung der Schwere senkrechte Linie, durch ein Senkblei mittelbar finden könne, wie an dem Hugenischen oder Lefeburischen Kreuze.

§. 3.

Will man nun die Höhen zweener Oerter mit einander vergleichen: so stellt man in den einen das Instrument, in den andern aber eine Stange mit einem daran beweglichen Täfelchen. Diese kann, wenn das Instrument ein Fernrohr hat, über 100° weit gestellt werden, muß aber, wenn man nicht

zu

zu Untersuchung der Bodens darzwischen andere Mittel anwenden will (z. B. Feldm. §. 10.), um deswillen öfters näher heran gebracht werden. Hernach richtet man die Durchsichten oder das Fernrohr, zielt nach der Stange, und läßt das Täfelchen so lange herauf oder herunter schieben, bis man die darauf angebrachte Gränze zwischen Schwarz und Weiß genau in seiner Gesichtslinie hat. Alsdenn bemerkt man sowohl die Höhe der Durchsichten des Instruments, als die Höhe der gedachten Gränze an dem Täfelchen über der Erde. Die größte von beiden zeigt den niedrigsten Ort an, und man erfährt, um wie viel er niedriger liege, wenn man die kleinere Höhe von der größeren abzählt.

§. 4.

Da man nicht leicht mit einer solchen Verrichtung fertig wird, so bringt man hernach das Instrument in die Stelle der Stange, diese aber weiter fort, und verfährt wie vorhin, bis man an das vorgeschriebene Ziel gekommen ist. Da die größte Höhe bald auf die Seite des Instruments, bald der Stange zu fallen pflegt: so hat ein Feldmesser dahin zu sehen, daß er dieses alles zu Vermeidung der Verwirrung in verschiedenen Spalten seines Papieres bemerke. Zählt man zuletzt einerseits alle Höhen des Instruments, und andererseits alle Höhen der Tafel zusammen: so wird man aus dem Unterschiede dieser Zahlen, den Unterschied der Höhen des ersten und letzten Ortes erkennen.

§. 5.

Man setzt hierbei zum Grunde, daß die Höhe anderer Oerter sich nach unserer scheinbaren Horizon-

zontallinie, die eine Tangente der Erde ist, bestimmen lasse; da doch diese Höhe eigentlich von dem Abstande eines Ortes von dem Mittelpunkt der Erde abhängt, und folglich durch einen aus diesem Mittelpunkt durch unsern Ort beschriebenen Kreisbogen bestimmt werden muß. Dieses macht, daß weit entlegene Oerter uns niedriger vorkommen, als sie würklich liegen, und muß selbst bei den besten Instrumenten und dem richtigsten Gebrauche derselben Irthümer veranlassen, welche merklich werden, so bald die mit einander zu vergleichenden Oerter weit, z. B. über 1000°, aus einander liegen. Die Trigonometrie lehret die Größe dieses Irthums berechnen, wenn man die Größe des Erdhalbmessers weiß. Worüber man bei praktischen Schriftstellern besondere Tabellen finden. Auf 1000° beträgt z. B. der Irthum 2′ 9″ 5‴ Decimalmaaß, auf 100° aber $3\frac{1}{12}$‴. Aus dem letzten kann man, wenn man die Stationen von 100° annimmt, den Irthum verbessern. S. hiervon Boehms Anhang zur Feldmeßkunst.

§. 6.

Ein anderes Mittel diesen Irthümern vorzukommen ist dieses, daß man zwo Stangen, wie sie oben beschrieben worden, in einer beträchtlichen Weite aus einander, das Instrument aber mitten zwischen sie stellt, und vor und rückwärts nach jeder Stange zielt. Hernach vergleicht man die Höhen beider Tafeln mit einander, ohne sich um die Höhe des Instruments zu bekümmern, da denn nothwendig ein Irthum den andern ersetzen, und hiermit gar keiner begangen werden muß. Wenn man

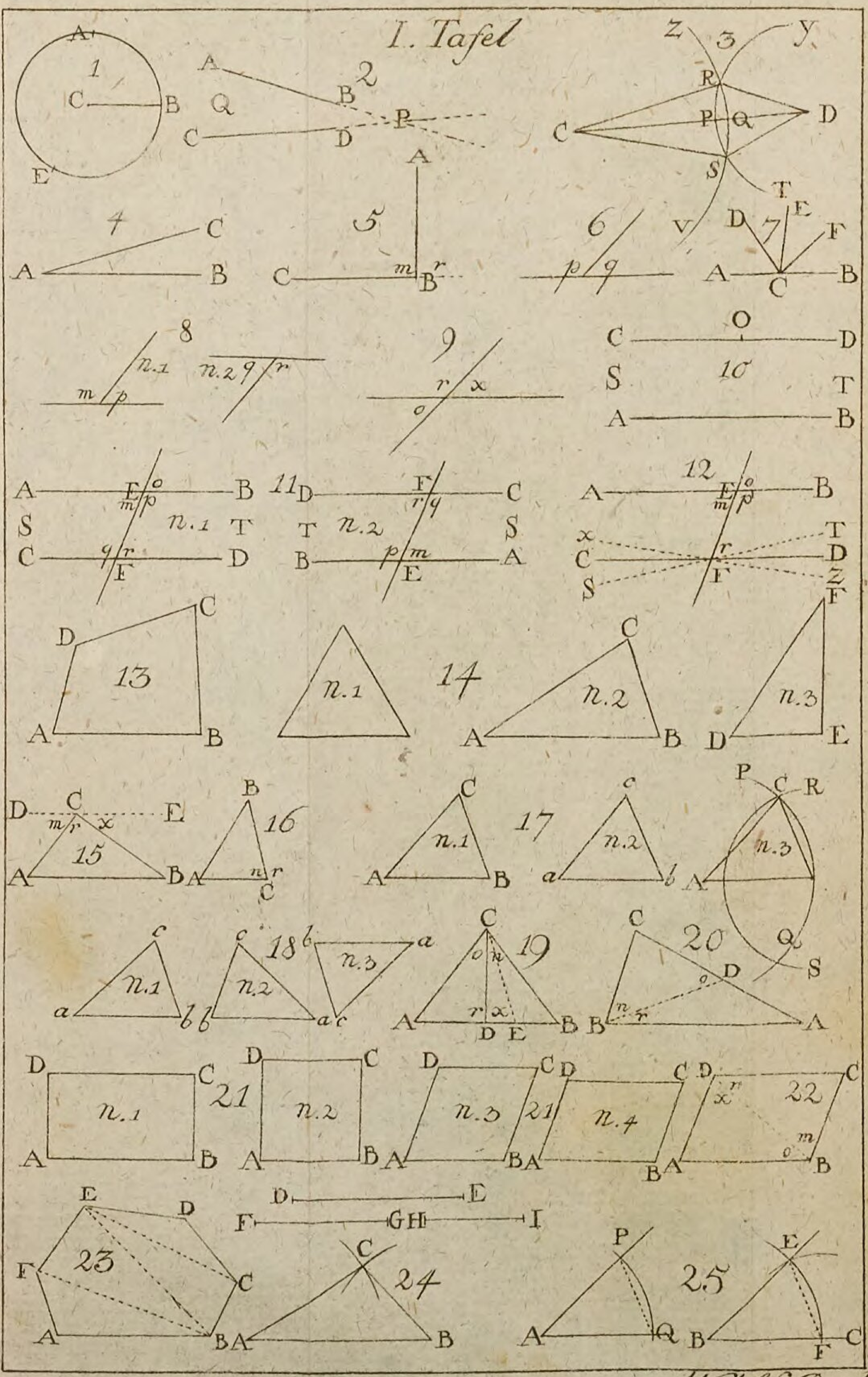
man in einer Station fertig ist, läßt man die vordere Stange stehen, geht mit der hintersten und dem Instrument weiter und verfährt eben so. Nur Schade, daß die Beschaffenheit des Bodens, und andere Hindernisse, die Stellung des Instruments zwischen zwoen gleich weit entfernten Stangen nicht jederzeit verstatten.

Ende.

---

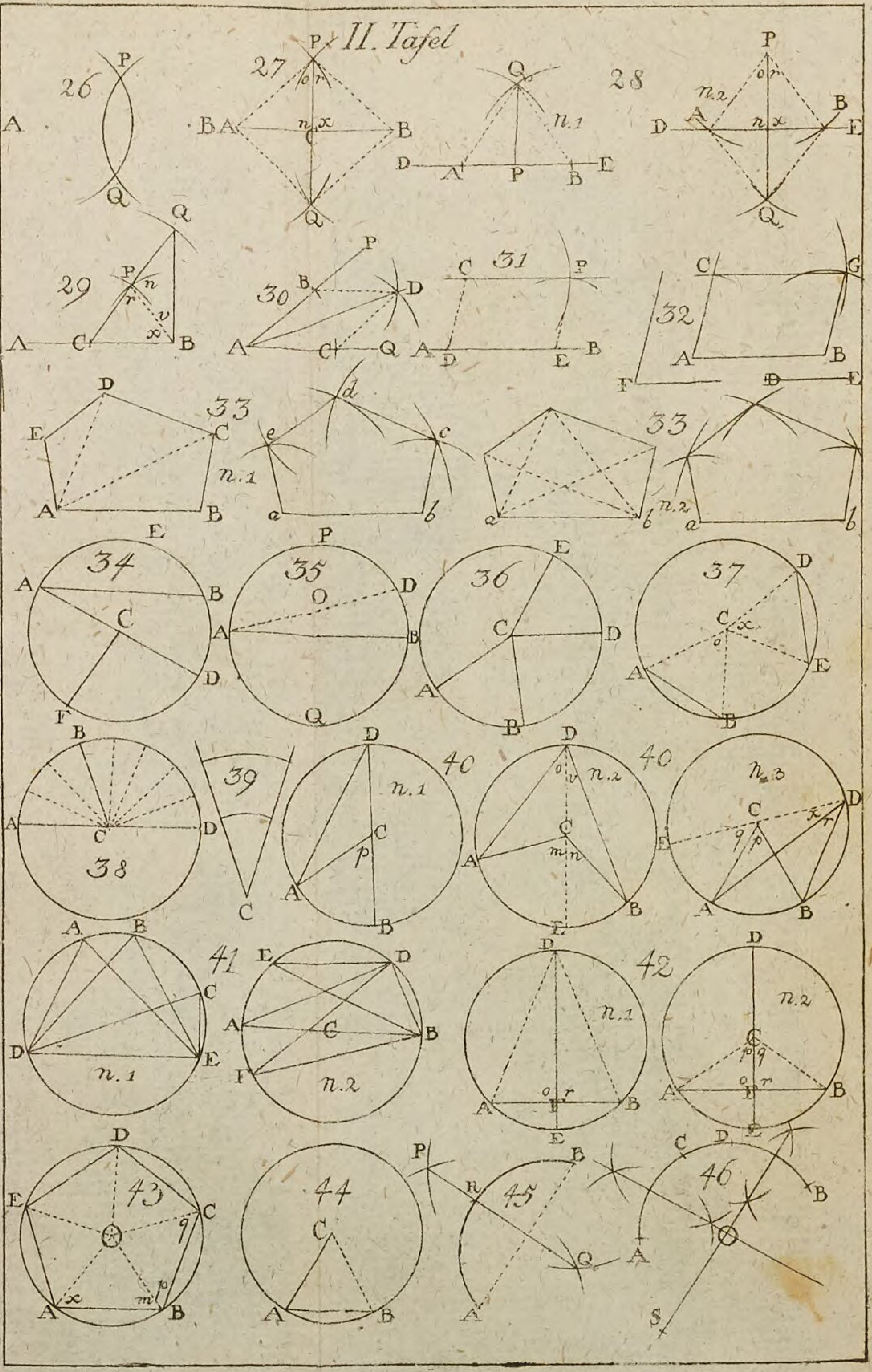
## Folgende Druckfehler sind in dem zweiten Stück bemerkt worden.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| S. 10. | Z. 18. | durchschnitten | lese | man | Durchschnitten |
| — | — | —21 und | — | — | um |
| — | 17 | — 3 von unten §. 16. | — | — | §. 31. |
| — | 28 | —28 die | — | — | der |
| — | 34 | — 4 v. unt. welches | — | — | welche |
| — | 46 | —15 letzteren | — | — | letzten |

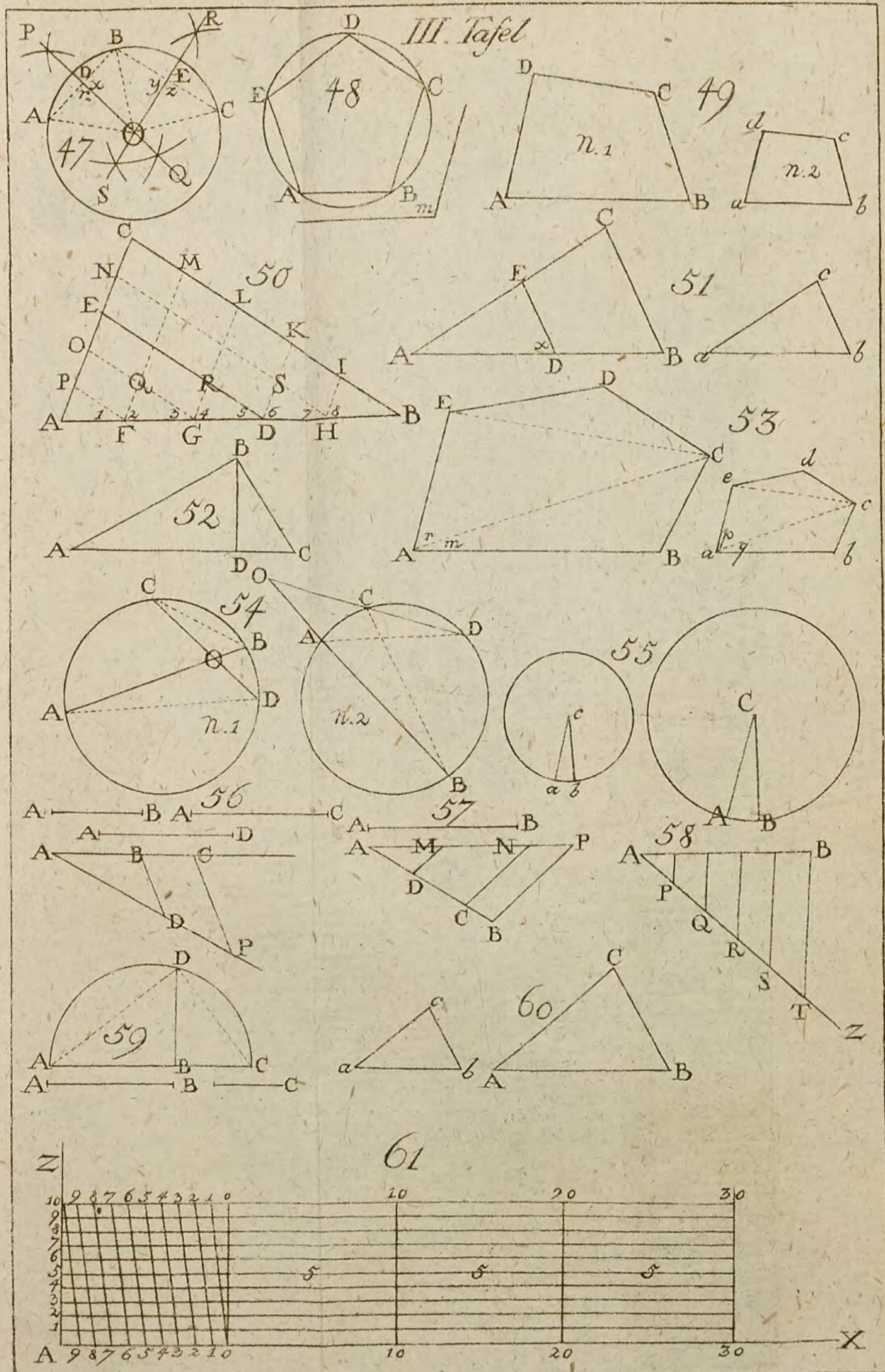



Wolff sc. Berol.

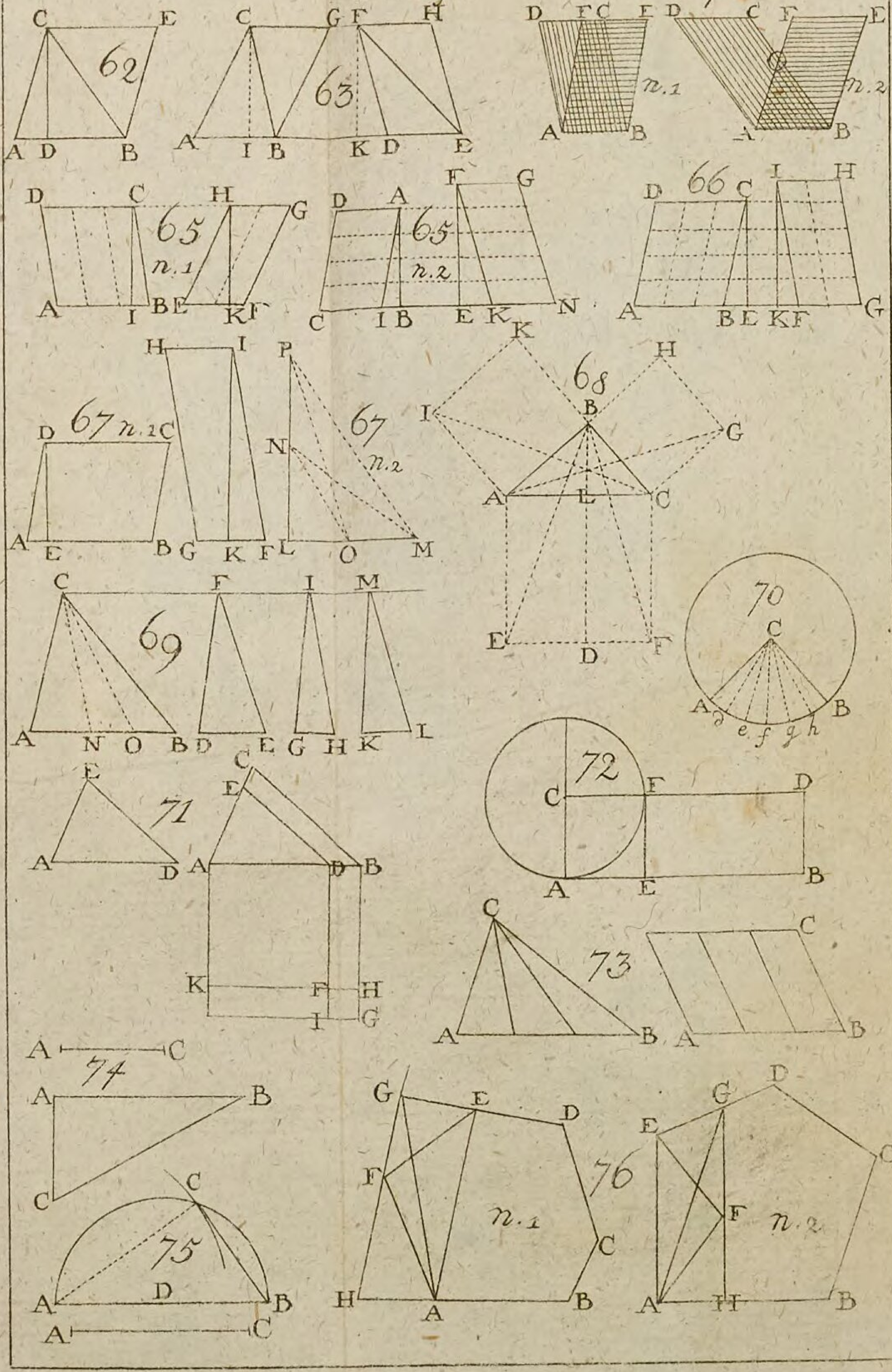
II. Tafel


26
27
28
29
30
31
32
33
n. 1
33
n. 2
34
35
36
37
38
39
40
n. 1
40
n. 2
n. 3
41
n. 1
n. 2
42
n. 1
n. 2
43
44
45
46

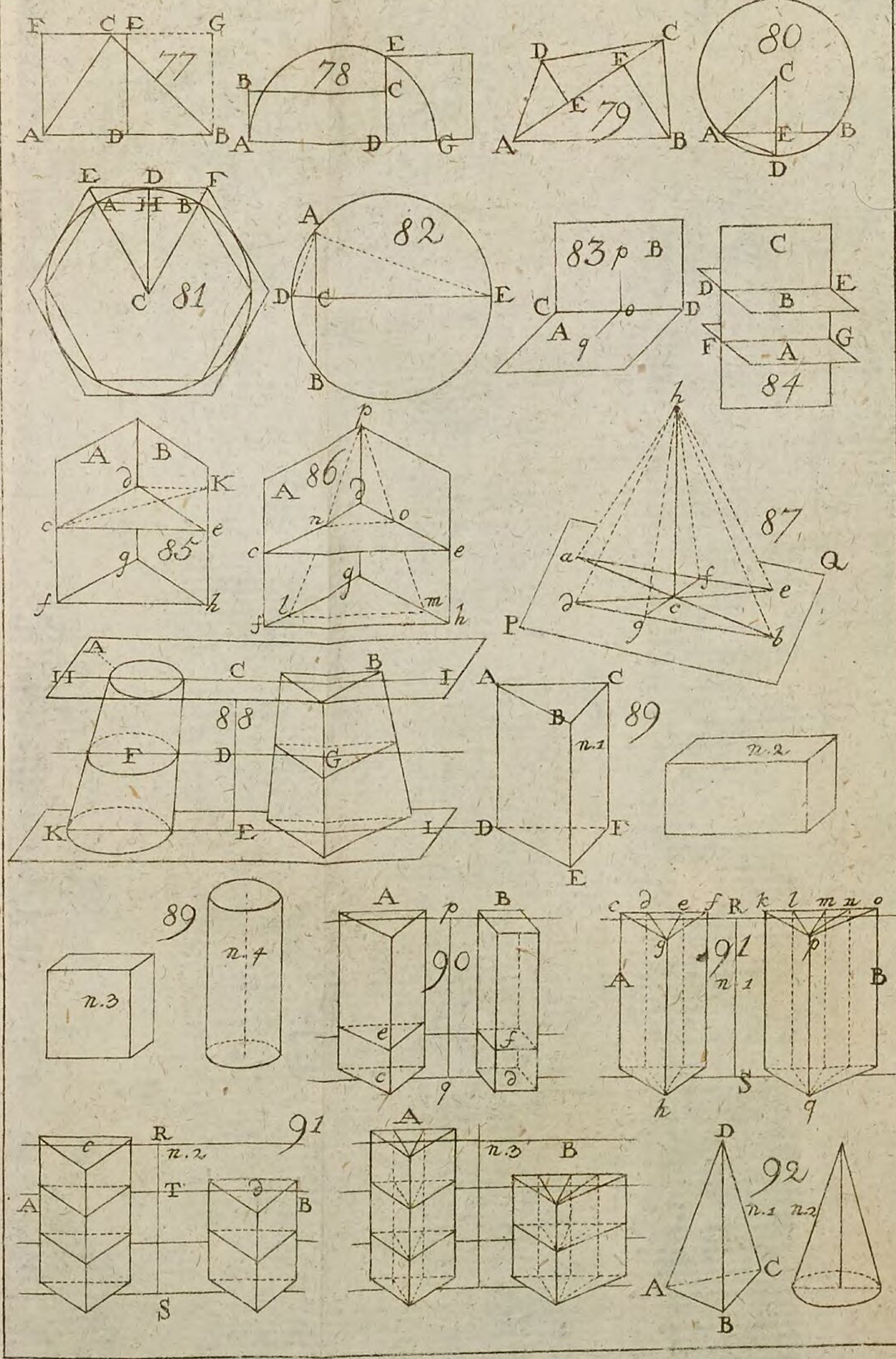
III. Tafel



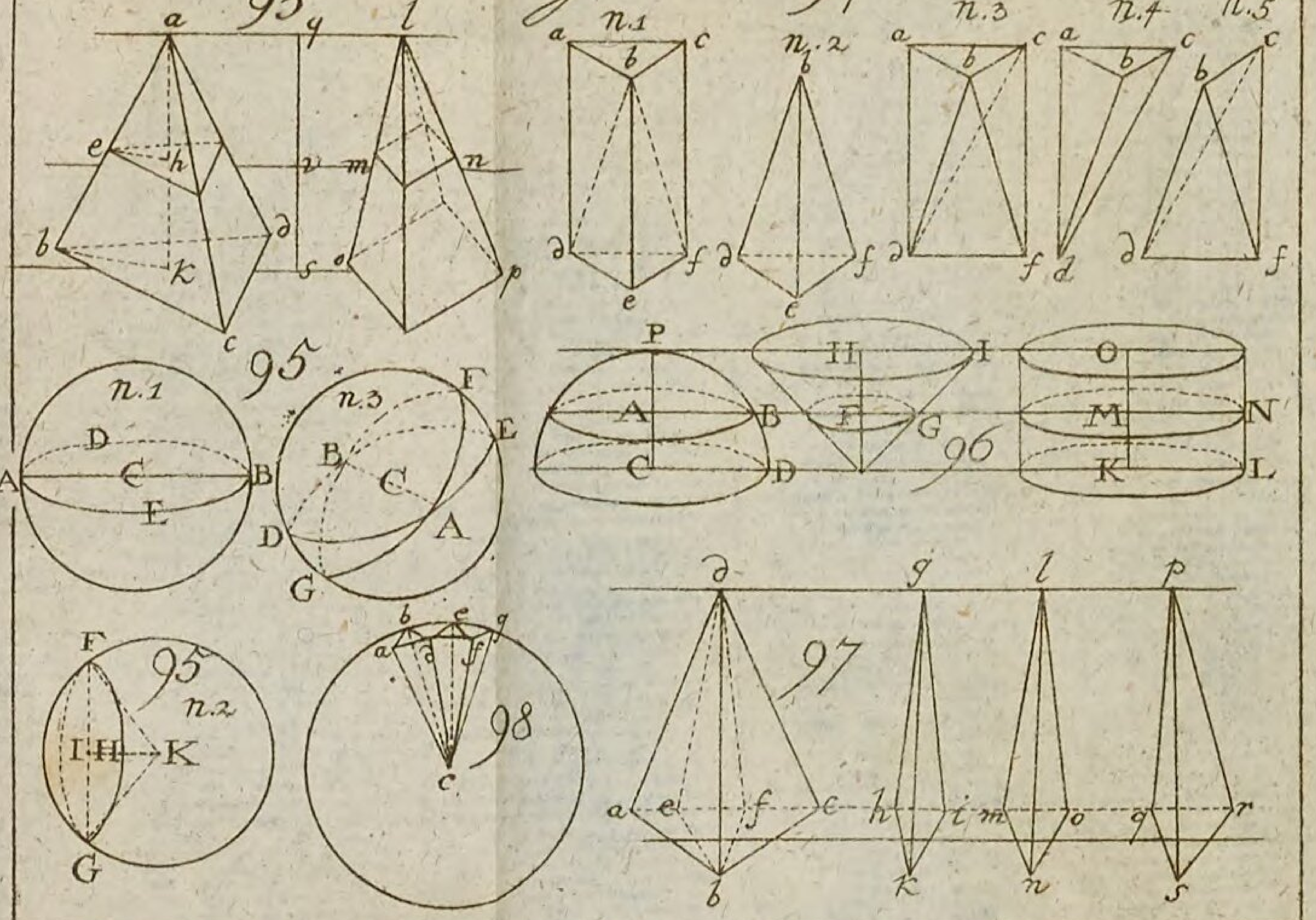
## IV. Tafel


62
63
64
n. 1
n. 2
65
n. 1
65
n. 2
66
67 n. 1
67
n. 2
68
69
70
71
72
73
74
75
76
n. 1
n. 2

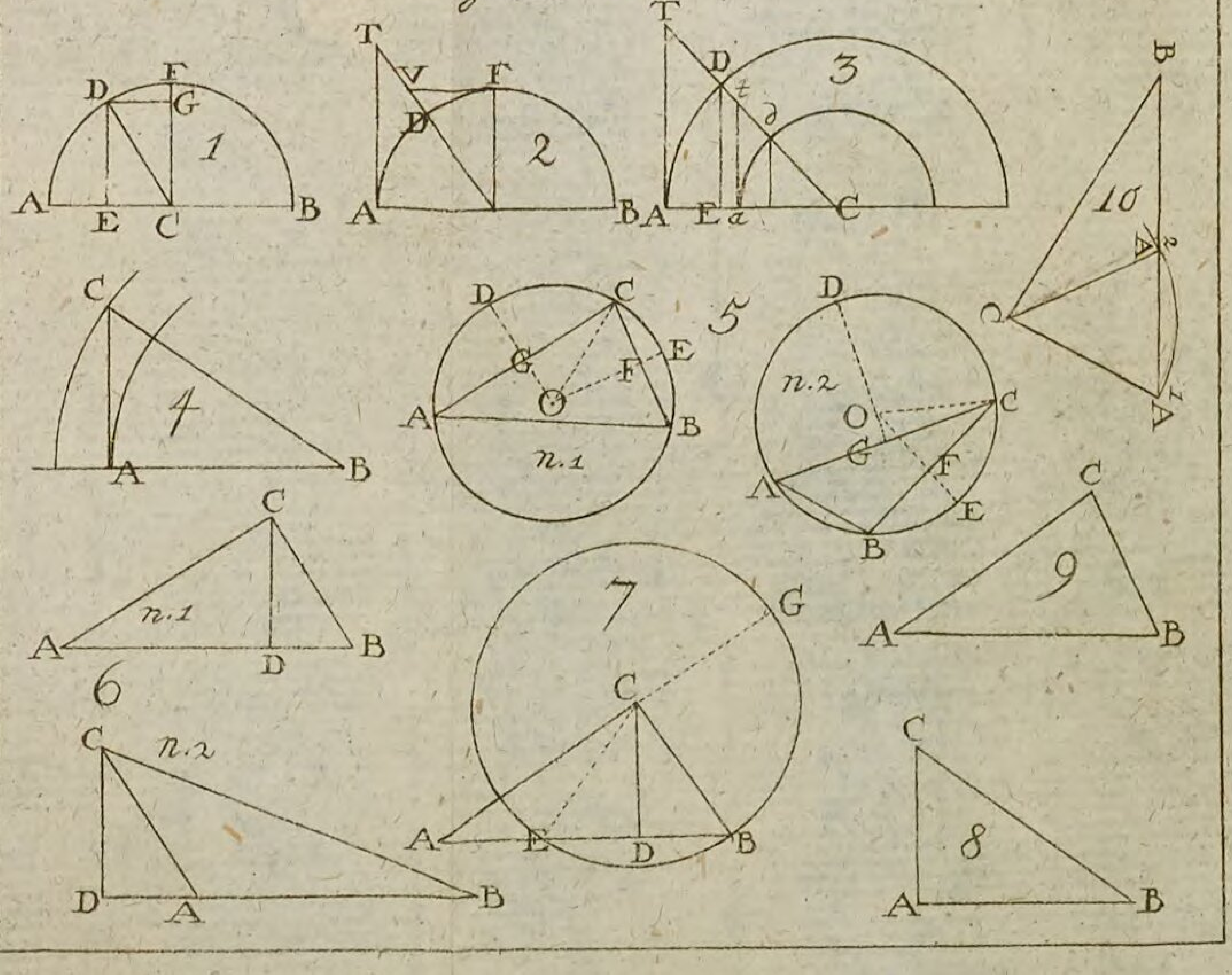
# V. Tafel

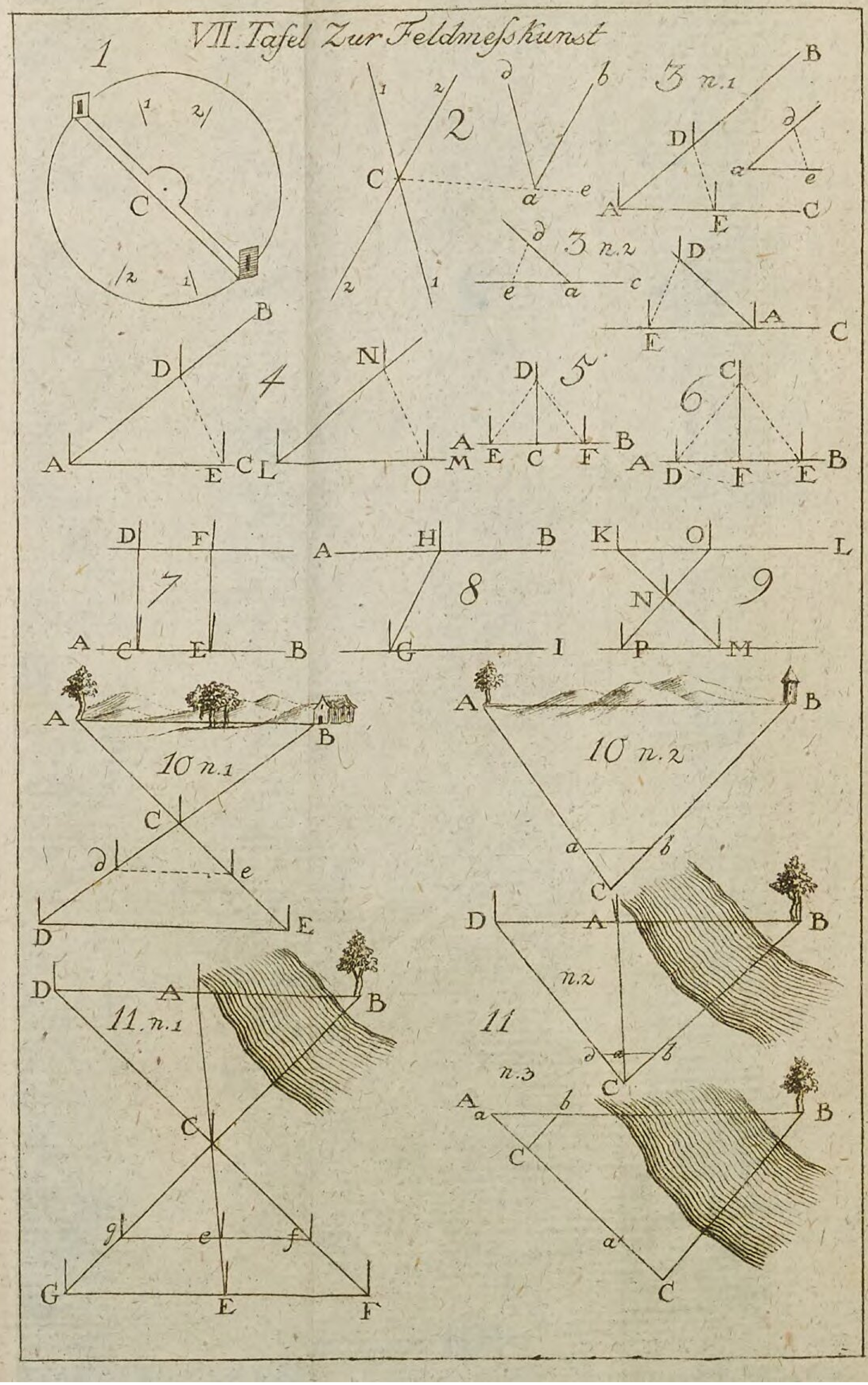


## VI. Tafel

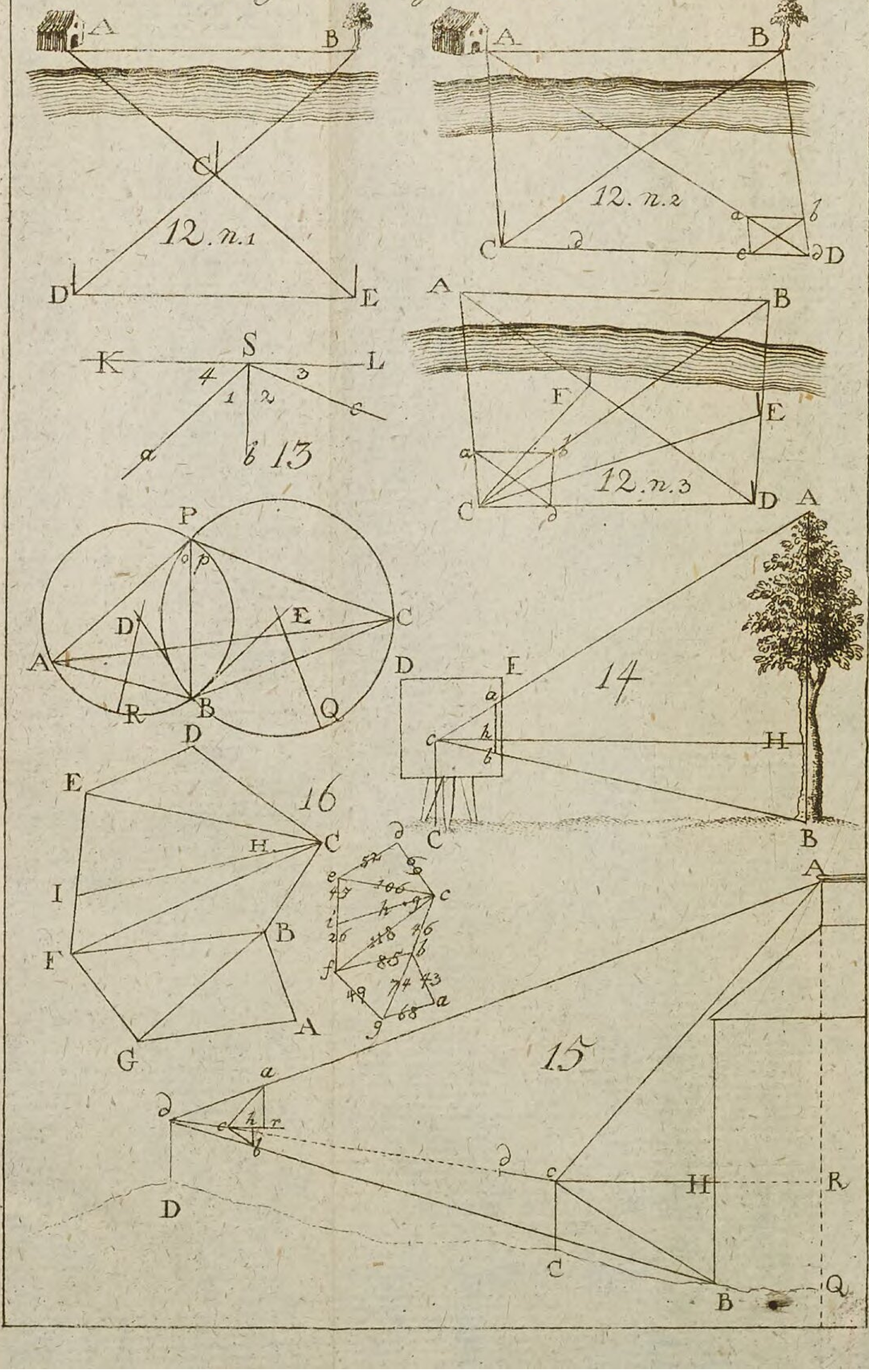



## Zur Trigonometrie

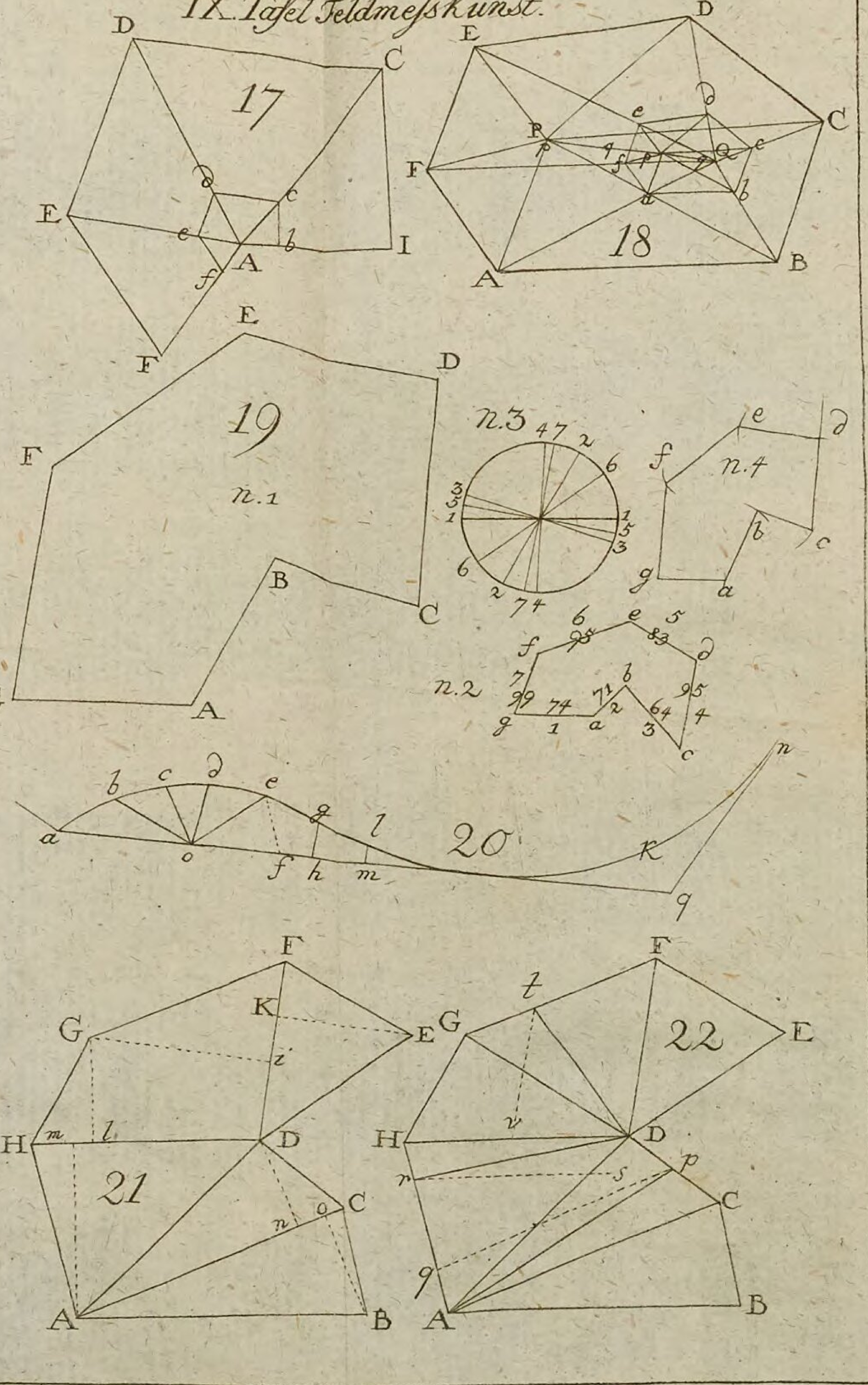



VII. Tafel Zur Feldmeßkunst
1
2
3 n.1
3 n.2
4
5
6
7
8
9
10 n.1
10 n.2
11. n.1
11
n.2
n.3

VIII. Tafel Feldmeßkunst



IX. Tafel Feldmess Kunst.




Wolff sc. Berol.

Mar

Rouyer

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rouyer, Franz Konrad

Anfangsgründe der Geometrie

Berlin 1778

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 738#(Beibd.
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267679-8
VD18 12532746-001